$$\int\limits_{\text{01 июня 2018}}^{\text{14 июня 2018}} \left(\begin{array}{c} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам

- алгебра;
- геометрия;
- комбинаторика;

и по датам.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются.

Оглавление

Глава 1

Икосаэдры (8-1)

НОД. Алгоритм Евклида

1. Докажите, что дробь $\frac{n^2+7n+13}{n+3}$ несократима при всех натуральных n.

2. Найдите НОД$(11! - 20, 10! - 20)$.

3. Найдите НОД$(11...1, 11...1)$:

(a) в первом числе 100 единиц, во втором 60;

(b) в первом числе m единиц, во втором n.

4. Найдите НОД$(2^{100} - 1, 2^{60} - 1)$.

5. Докажите, что НОД$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m,n)} - 1$.

6. Найдите НОД

(a) всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений;

(b) всех чисел, состоящих из 5 единиц и 7 двоек.

7. На столе лежат две кучки: в одной 1573 ореха, в другой 97900. Двое играют в игру: очередным ходом игрок может разложить любую кучку на две, одна из которых совпадает по размерам с уже имеющейся на столе. Кто выиграет при правильной игре?

8. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная на равносторонние треугольники со стороной 1. Двое играют в игру. За ход можно отломить треугольник с целой стороной, съесть его, а остаток передать сопернику. Также можно съесть последний треугольник со стороной 1. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Диофантовы уравнения

1. Пусть $(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) — некоторое целочисленное решения уравнения $ax + by = 1$. Докажите, что все решения этого уравнения в целых числах получаются по формулам $x = x_0 + kb$, $y = y_0 - ka$, где k — произвольное целое число.

2. Как описать в целых числах все решения уравнения $ax+by = c$ при произвольных целых a, b, c?

3. Как при помощи алгоритма Евклида найти какое-нибудь решение уравнения $ax+by = c$ (при условии, что оно существует)?

4. Решите в целых числах уравнения:
(a) $5x - 4y = 1$; **(b)** $9x + 15y = 4$; **(c)** $1500x + 501y = 2001$;
(d) $-27x + 12y = 15$; **(e)** $14x - 68y = 8$.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде отношения 7-й степени какого-то числа и 5-й степени какого-то числа.

6. На складе имеется тушенка в банках по 350 г и по 425 г. Для проведения операции «Буря в стакане» требуется 15 кг тушенки. Подскажите главному интенданту, сколько и каких банок заказать на складе.

7. Школьники ходили купаться на реку через большой песчаный пляж. Шедший последним Степа аккуратно провел на песке две черты, перпендикулярных направлению движения ребят, на расстоянии 10 метров друг от друга, и насчитал между ними ровно 559 следов. Сколько семиклассников ходило на реку, если известно, что длина шага каждого из них составляет 55 см?

8. Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. На раздачу явилось 11 членов профсоюза и 15 не-членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не-членам (всем хотя бы по одному слону!). Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

9. Все натуральные числа поделены на хорошие и плохие. Известно, что если число A хорошее, то и число $A + 6$ тоже хорошее, а если число B плохое, то и число $B + 15$ тоже плохое. Когда взяли N первых чисел, оказалось, что среди них плохих чисел в три раза меньше, чем хороших. Чему равно N?

10. Докажите, что если $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, то уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 1$$

разрешимо в целых числах.

11. Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x + 100y$, где x, y — натуральные, и синим цветом — все остальные точки. Найдите на прямой такую точку, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета.

Сравнения

1. Делится ли $5^{70}+6^{70}$ на 61?
2. Целые числа a и b таковы, что $N=(31a+57b)(57a+31b)$ делится на 11. Докажите, что N делится на 121.
3. У числа 2018^{2018} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр, и т. д., пока не получилась цифра. А что это за цифра?
4. Докажите, что произведение первых n простых чисел, увеличенное на 1, не является точным квадратом.
5. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)
6. Пусть p — простое число. Может ли сумма чисел 2^p и 3^p оказаться степенью (выше первой) натурального числа?
7. Пусть p и q — последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p+q^q \,\vdots\, p+q$.
8. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй — на 203, а в третьей — на 304?
9. Для натуральных a и n докажите, что $a^{2n+3}+(a-1)^n \,\vdots\, a^2-a+1$.
10. На доске записано число 2018. За одну операцию разрешается в любое место числа вставить две одинаковые цифры. Можно ли в результате нескольких таких операций получить число, кратное 583?
11. При каких целых k число $a^3+b^3+c^3-kabc$ делится на $a+b+c$ при любых целых a, b, c с ненулевой суммой?
12. Последовательность задана следующим образом: $a_1=a_2=1$, $a_{k+2}=a_k\cdot a_{k+1}+1$ при всех натуральных k. Докажите, что при всех натуральных $n\geqslant 7$ число a_n-3 является составным.

Ферма и Эйлер

Определение 1. *Полная система вычетов* по модулю m — это все остатки от деления на m, встречающиеся по одному разу.

Определение 2. *Приведённая система вычетов* по модулю m — это все остатки от деления на m, взаимно простые с m, встречающиеся по одному разу.

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, а a не делится на p. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое число, а p — простое. Тогда $a^p \equiv a \pmod{p}$.

1. **(a)** Вспомните бином Ньютона $(a+b)^n = a^n + \ldots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$, а также докажите, что C_p^l делится на p, где p — простое число, а $l < p$ — натуральное.
   (b) Докажите малую теорему Ферма с помощью индукции.

2. **(a)** Пусть a не делится на p. Докажите, что множество остатков чисел $1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ при делении на p совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.
   (b) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

3. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма.

4. Вершинам правильного $(p-1)$-угольника присвоим различные ненулевые остатки при делении на p. Проведем из остатка k стрелку в остаток ka.
   (a) Докажите, что из каждой точки выходит одна стрелка, и в каждую точку входит одна стрелка, т. е. все стрелки разбиваются на циклы.
   (b) Докажите, что у всех этих циклов одна и та же длина, делящая $p-1$, и выведите отсюда малую теорему Ферма.

5. Верна ли малая теорема Ферма в обратную сторону? Если для натурального $k > 1$ и всех целых a верно $a^k \equiv a \pmod{k}$, то обязательно ли k — простое число?

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.

Упражнение. Докажите, что если $n > 2$, то $\varphi(n)$ четно.

Теорема Эйлера. Натуральные a и n взаимно просты. Тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

6. **(a)** Приведите рассуждения, аналогичные задаче 2, и докажите теорему Эйлера.
   (b) Приведите рассуждения, аналогичные задаче 4, и докажите теорему Эйлера.

7. **(a)** Пусть p и q — различные простые числа. Найдите $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(pq)$.

   (b) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

(c) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — разложение n на простые множители. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

8. **Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — разложение m на простые множители, $s = \text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \dots, \varphi(p_k^{\alpha_k})\big)$. Докажите, что для любого целого a, взаимно простого с m, верно $a^s \equiv 1 \pmod{m}$.

Ферма и Эйлер — 2

1. Найдите остаток при делении 4^{1008} на
(a) 2017; **(b)** 105; **(c)** 2018.

2. Докажите, что $2^{n!} - 1 \,\vdots\, n$ для любого нечетного натурального n.

3. Докажите, что число $99^{100} + 100^{99}$ — составное.

4. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1} \,\vdots\, p$.

5. Дана последовательность $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Найдутся ли в ней пять последовательных членов, делящихся на 98765?

6. При каких простых p число $5^{p^2} + 1$ делится на p?

7. На какие три цифры оканчивается число 7^{9999}?

8. Какой остаток дает число $42^{42^{42}}$ при делении на 2017?

9. **(a)** Докажите, что $n^{84} - n^4 \,\vdots\, 20400$ для любого натурального n.
(b) Можно ли 20400 заменить на какое-нибудь большее число, чтобы утверждение осталось верным?

10. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток дает число $p^q + q^p$ при делении на pq?

11. Конечно ли множество чисел вида вида $2^n - 1$, у которых более миллиона различных простых делителей?

12. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{504} + b^{504} + c^{504} \,\vdots\, 2018$. Докажите, что и $abc \,\vdots\, 2018$.

13. При каких натуральных n для каждого натурального $k \geqslant n$ существует натуральное число с суммой цифр k, делящееся на n?

КТО и Вильсон

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7, 11 остатки 1, 2, 4, 6, 10 соответственно.

2. (a) Решите в целых числах уравнение $10x + 8 = 11y + 10$.
   (b) Найдите все числа, дающие остаток 2 при делении на 8 и остаток 11 при делении на 13.

Китайская теорема об остатках. Пусть целые числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, $m = m_1 \ldots m_n$, а $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные целые числа. Тогда существует единственное целое число x такое, что $0 \leqslant x < m$ и

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

1. **(a)** Натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что число $x = (m_2 m_3 \ldots m_n)^{\varphi(m_1)}$ является решением системы

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n}. \end{cases}$$

(b) Найдите в явном виде число x, удовлетворяющее КТО.

2. Натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что если числа x_1, $x_2, \ldots, x_n$ пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, то число $x = x_1 m_2 \ldots m_n + m_1 x_2 \ldots m_n + \ldots + m_1 m_2 \ldots m_{n-1} x_n$ пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$. Выведите отсюда КТО.

3. Проникнитесь упражнением 2, и докажите КТО по индукции.

Теорема Вильсона. Пусть p — простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

4. Докажите, что для любого целого a, не делящегося на p, найдется целое b такое, что $ab \equiv 1 \pmod{p}$. Попробуйте разбить все ненулевые остатки при делении на p на пары обратных, и докажите теорему Вильсона.

5. Сколько существует ориентированных замкнутых ломаных, проходящих через все вершины правильного p-угольника? (Ломаные, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из нее теорему Вильсона.

6. Верна ли теорема Вильсона в обратную сторону? Если для натурального $p > 1$ верно $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, то обязательно ли p — простое число?

7. **(a)** Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 1$ существует целое число n такое, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

(b) Докажите, что для простых чисел p вида $4k + 3$ таких n не существует.

Числовой разнобой

1. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася – всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?
2. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)!-p \vdots p^2$.
3. Целые числа m и n взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать $(m+2018n, n+2018m)$?
4. Докажите, что для любого натурального k существует сколь угодно длинный отрезок из натуральных чисел, у каждого из которых есть хотя бы k различных простых делителей.
5. Пусть p и $p+2$ — простые числа. Докажите, что $2p(p+1)(p+2)$ является общим делителем чисел $p^{p+2}-p$ и $(p+2)^p-p-2$.
6. Докажите, что для любого простого числа p найдётся число вида 2018^n-n, делящееся на p.
7. Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью числа n?

Индукция

1. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.
2. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что найдется хотя бы один чистый кусок.
3. Плоскость разбита прямыми на области. Докажите, что области можно раскрасить в два цвета так, чтобы граничащие области были разного цвета.
4. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
5. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.
6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.
7. Несколько человек не знакомы между собой. Докажите, что можно познакомить некоторых из них друг с другом так, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых.
8. При каких натуральных n квадрат можно разрезать на n меньших квадратов (не обязательно различных)?
9. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.
10. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

Индукция-2

1. На доске в ряд написаны числа 1 и 1. Каждую минуту между соседними числами вписывается их сумма. Какова сумма всех чисел через n минут?

2. Для всех натуральных $n \geqslant 3$ докажите, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$.

3. Докажите, что любое целое число единственным образом представимо в виде суммы некоторых из чисел $1, -2, 4, \ldots, (-2)^n, \ldots$

4. Из чисел от 1 до $2n$ выбраны $n+1$ чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

5. Докажите, что любая правильная дробь может быть представлена в виде суммы различных чисел, обратных к целым.

6. Докажите, что $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$, где f_n — n-е число Фибоначчи.

7. При каких натуральных n число 1 можно представить в виде суммы n обратных величин попарно различных натуральных чисел?

8. Назовем число *интересным*, если оно на 1 больше некоторого точного квадрата. Докажите, что произведение любых нескольких интересных чисел представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

9. Пусть $s(n)$ — это количество разбиений натурального числа n в упорядоченную сумму степеней двойки (например, $s(4) = 6$). Найдите наименьшее $n > 2018$ такое, что $s(n)$ нечетно.

10. Для всех натуральных n докажите, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Принцип крайнего

1. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что найдется ладья, бьющая не более двух других.

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если
(a) $k = 9$; **(b)** $k = 8$?

3. 23 семиклассника бегают по футбольному полю с шишками в руках. По свистку все они останавливаются, и каждый кидает шишкой в ближайшего к нему семиклассника (все расстояния между ними различны). Докажите, что в какого-то семиклассника шишка не полетит.

4. В круге радиуса 1 отметили восемь точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 1.

5. В клетках таблицы 8×8 расставлены 64 различных целых числа. Докажите, что найдутся две соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются хотя бы на 5.

6. 7 грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что какие-то трое грибников собрали не меньше, чем остальные четверо.

7. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены n^2 различных чисел. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.

8. На прямой выбрали $2n + 1$ отрезков. Известно, что любой из них пересекается (хотя бы по точке) хотя бы с n другими. Докажите, что найдется отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

9. На конгресс собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе одинаковое число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, имеющий на конгрессе ровно одного друга.

10. *Теорема Сильвестра.* На плоскости даны n точек. Оказалось, что на любой прямой, проходящей через любые две из них, лежит еще хотя бы одна точка. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

Анализ информации — 1

1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если

(a) каждый следующий вопрос задается после того, как получен ответ на предыдущий вопрос;

(b) надо заранее сказать все вопросы?

2. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

3. Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стерлись, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Хватит ли ему для этого

(a) четырех; **(b)** трех

взвешиваний?

4. Имеется 1000 бутылок с вином, в одной вино испорчено, и 10 белых мышей. Если мышь выпьет плохого вина, то через минуту станет фиолетовой. Разрешается один раз накапать каждой мыши вина из разных бутылок, дать им выпить одновременно и подождать минуту. Как найти испорченное вино?

5. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть

(a) 1 орех; **(b)** 2 ореха.

Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

6. **(a)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

(b) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

7. **(a)** В жюри олимпиады 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам жюри, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберется не менее 6 членов жюри?

(b) Круглая арена цирка освещается n разными прожекторами. Каждый прожектор освещает некую выпуклую фигуру, причем если выключить любой один прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить любые два — будет освещена не полностью. При каких n такое возможно?

8.* Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому колпак одного из 1000 цветов. После этого глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или черную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Как мудрецам заранее договориться, чтобы это удалось?

9.* Есть n разных ключей от n разных замков (каждый ключ подходит ровно к одной двери). За какое наименьшее число попыток можно гарантированно узнать, какую дверь открывает какой ключ?

Анализ информации — 2

1. Вам и мне надевают на голову шляпу. Каждая шляпа либо черная, либо белая. Вы видите мою шляпу, я — вашу, но никто не видит своей шляпы. Каждый из нас (не подглядывая и не подавая друг другу никаких сигналов) должен попытаться угадать цвет своей шляпы. Для этого по команде одновременно каждый называет цвет — «черный» или «белый». Если хоть один угадал — мы выиграли. Перед этим нам дали возможность посовещаться. Как действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?

2. **(a)** Мудрецам предстоит испытание: им завяжут глаза, наденут каждому черный или белый колпак, построят в колонну и развяжут глаза. Затем мудрецы по очереди, начиная с последнего (который видит всех), будут называть цвет своего колпака. Кто ошибется — тому голову с плеч. Сколько мудрецов гарантированно может спастись? (Каждый видит всех впереди стоящих; у мудрецов до испытания есть время, чтобы договориться.)
(b) А если колпаки могут быть k данных цветов?
(c*) А если колпаки могут быть 100 данных цветов, 100 мудрецов стоят по кругу (видят друг друга) и называют цвета своих колпаков одновременно, и нужно, чтобы цвет своего колпака угадал хотя бы один?

3. **(a)** В тюрьме 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы уже не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, можно оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, я всех выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-то забудут, — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.
(b) А если неизвестно, была ли лампа в самом начале включена или нет?

4. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это целое число
(a) от 1 до 900; **(b*)** от 1 до 1700.
Два шпиона узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду один или несколько камней, потом — второй, потом — опять первый, и т. д. до тех пор, пока камни не кончились. Затем шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.)

5. Имеются 8 монет, семь из которых одинаковые, а одна фальшивая и отличается по весу (неизвестно, в какую сторону). Также есть чашечные весы, которые показывают правильный результат, если на чашах разный вес, а если вес одинаковый, то вместо равенства показывают что попало.
(a) Придумайте способ найти фальшивую монету и узнать, тяжелее она настоящих или легче.

(b) Можно ли гарантированно найти фальшивую монету всего за 4 взвешивания?

6. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие — орлом вверх, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое число от 1 до N и показать всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.
(a) Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = a$, то есть способ и для $N = 2a$.
(b) Найдите все N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

7. В тесте 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Как Вите гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем
(a) после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке);
(b) после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?
(Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.)

8. Ботанический определитель использует 100 признаков. Каждый признак либо есть у растения, либо нет. Определитель «хороший», если любые два растения в нем отличаются более чем по 50 признакам. Может ли хороший определитель описывать более
(a) 50; **(b*)** 34
растений?

Догонялки на плоскости

Конус Маха

1. В поле проходит прямая дорога, по ней со скоростью 10 км/ч едет автобус. Укажите все точки поля, из которых можно догнать автобус, если бежать
(a) с той же скоростью; **(b)** со скоростью 5 км/ч.

2. Самолет, летящий в два раза быстрее скорости звука, вылетел из точки A и летит в точку B по прямой. Самолет непрерывно издает звук, который распространяется во все стороны. Нарисуйте все точки, до которых успеет дойти звук самолета за время, пока самолет летит из A в B. (Считайте, что всё происходит в плоскости.)

3. В поле проходит прямая дорога. Человек, стоящий на дороге в точке A, может идти по полю со скоростью не более 3 км/ч и по дороге со скоростью не более 6 км/ч. Нарисуйте, куда он может попасть за 1 ч.

4. В поле проходят две перпендикулярные друг другу прямые дороги. Человек, стоящий на перекрестке, может идти по полю со скоростью не более 3 км/ч и по дорогам со скоростью не более
(a) 6 км/ч; **(b)** $3\sqrt{2}$ км/ч.
Нарисуйте все точки, в которые он может попасть за 1 час.

5. Пункт A находится в лесу в 5 км от прямой дороги, пункт B — на дороге, расстояние от A до B — 13 км (по полю). Скорость пешехода на дороге — 5 км/ч, в лесу — 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет попасть из A в B?

Найди стратегию

6. Миша стоит в центре круглой лужайки радиуса 100 м. Каждую минуту он шагает на 1 м, заранее объявляя, в каком направлении хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы когда-нибудь гарантированно выйти с лужайки?

7. В центре квадрата сидит заяц, в каждом углу — волк. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки бегают лишь по сторонам квадрата с максимальной скоростью, которая больше максимальной скорости зайца в 1,4 раза?

8. На плоскости играют волк и несколько овец. Сначала ходит волк, потом какая-нибудь овца, потом волк, потом опять какая-нибудь овца, и т. д. И волк, и овцы передвигаются за ход в любую сторону не более, чем на 1 м. Для любого ли числа овец существует такая начальная позиция, что волк не поймает ни одной овцы?

9. Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии — улицы, клеточки — кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (его местонахождение неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции — увидеть бандита. Есть ли у милиции алгоритм наверняка достигнуть своей цели? Максимальные скорости милиции и бандита — какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние.

Ловим в несколько этапов

10. На плоскости играют Левша и невидимая блоха. За ход Левша проводит прямую, а блоха прыгает на 1 м, не пересекая ни одной прямой Левши. Если блоха не может сделать ход, она становится видимой и сдается. Может ли Левша гарантированно выиграть?

11. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой, и едет по бесконечной в обе стороны дороге. Полицейский на новой машине не знает, ни когда машину угнали (это могло случиться сколь угодно давно), ни в каком направлении уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?

12.* На бесконечной клетчатой сетке (линии — улицы, клетки — кварталы) трое полицейских ловят вора. Местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам. Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Смогут ли полицейские гарантированно поймать вора? (Полицейские тоже движутся только по улицам.)

Геометрия на клетчатой бумаге

1. Постройте центр окружности, проходящей через точки A, B и C (рис. 1).

2. Постройте какой-нибудь треугольник, две медианы которого взаимно перпендикулярны.

3. Постройте центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 3).

4. Постройте точку, симметричную точке C относительно прямой AB (рис. 4).

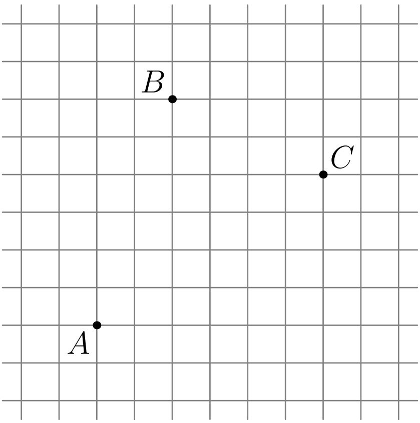


Рис. 1

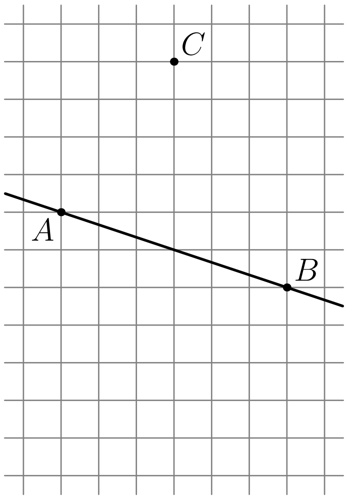


Рис. 4

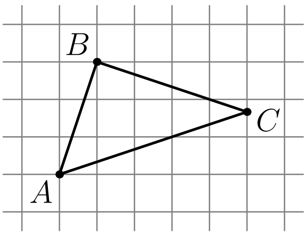


Рис. 3

5. Найдите:

(a) угол между прямыми AE и DQ (рис. 5a);

(b) угол AKM (рис. 5b).

6. Докажите, что углы MAN и BPM равны (рис. 6).

7. Не выходя за пределы листа размера 3×3, докажите равенство углов A и B (рис. 7).

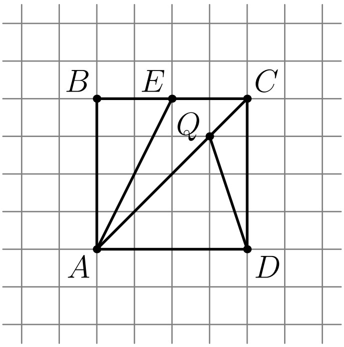


Рис. 5a

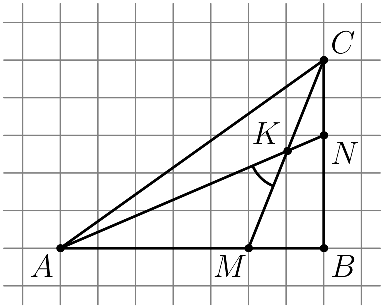


Рис. 5b

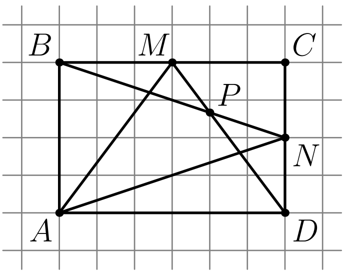


Рис. 6

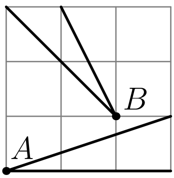


Рис. 7

8. Дан шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 8). Докажите, что равны площади треугольников ACE и BDF.

9. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого составляет 4/5 клетки.

10. **(a)** Найдите сумму трех углов, обозначенных на рис. 10a.

(b) Найдите сумму пяти углов MAN, MBN, MCN, MDN и MEN на рис. 10b.

(c) От квадрата $ABCD$ «отрезали» треугольник MND, как показано на рис. 10c. Найдите сумму трех углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

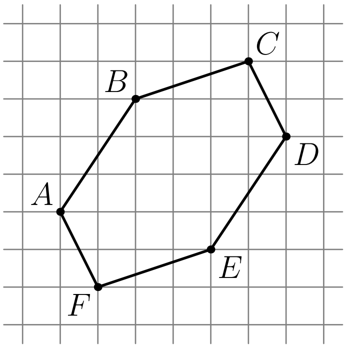


Рис. 8

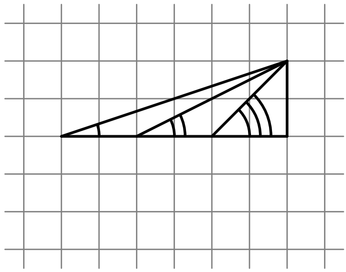


Рис. 10a

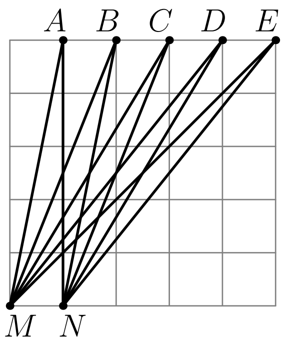


Рис. 10b

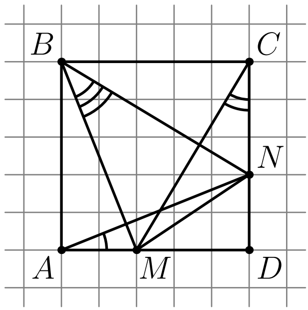
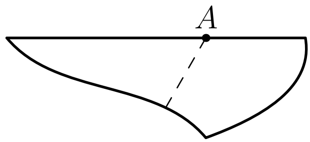


Рис. 10c

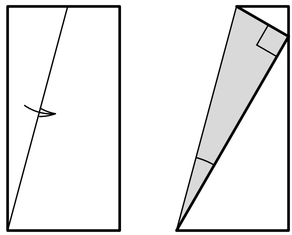
Перегибая бумагу, получаем задачу

1. У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, а потом разогнули обратно. A — общая точки линии сгиба и ровного края (рисунок справа). Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A, используя только перегибание бумаги.

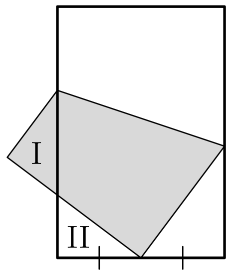


2. Бумажный прямоугольник согнули по диагонали, а затем, сложив еще два раза, получили четырехслойный треугольник. Найдите угол между стороной и диагональю исходного прямоугольника.

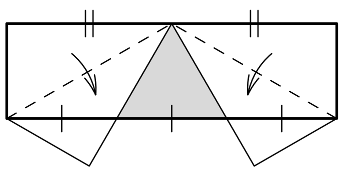
3. Квадратный лист бумаги сначала сложили вдвое, а затем так, как показано на рисунке справа. Чему равен отмеченный угол?



4. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рисунок справа). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



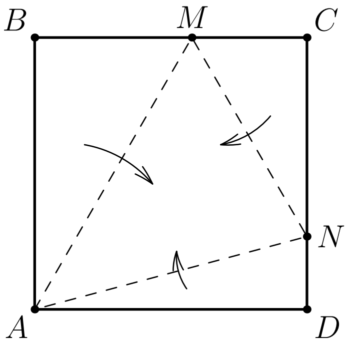
5. Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке справа. Противоположная сторона при этом оказалась разделенной на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник — равносторонний.

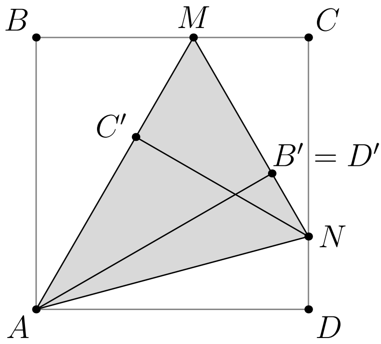


6. Прямоугольный лист бумаги перегнули по прямой так, что противоположные вершины совместились. В результате получились три треугольника: в середине — один двухслойный, а по краям — два однослойных. Докажите, что двухслойный треугольник — равнобедренный.

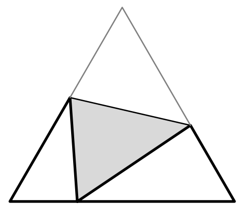
7. Бумажный прямоугольник $ABCD$ перегибается так, что точка C попадает в точку C' — середину стороны AD. Найдите отношение $DK : AB$, где K — точка линии сгиба на стороне CD.

8. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник MAN (рисунки ниже). Найдите угол ANM.





9. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (рисунок справа). Докажите, что углы двух получившихся белых треугольников соответственно равны.



10. Из листа бумаги, одна сторона которого желтая, а другая — белая, Саша вырезал равнобедренный треугольник. Затем он перегнул его по биссектрисе угла при основании и склеил. Получился треугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников: белого и желтого. Докажите, что после перегибания у него вновь получился равнобедренный треугольник.

11. Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M — середина CD. Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M, а середина AD попала на диагональ AC. Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим MX. Теперь согнем квадрат так, чтобы сгиб снова проходил через точку M, а середина BC попала на диагональ BD. Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим MY. Докажите, что треугольник MXY — равносторонний.

12. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, наложил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провел диагональ, опустил на нее перпендикуляры из двух остальных вершин, после чего разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону так, что вместе с нижним прямоугольником они образовали еще один прямоугольник. Каким образом по полученному прямоугольнику восстановить исходный, используя только циркуль и линейку?

Разобьем на равнобедренные треугольники

1. Два угла треугольника равны $100°$ и $60°$. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.

2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?

3. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. В каком отношении эта прямая может разделить угол треугольника?

4. Про треугольник, один из углов которого равен $120°$, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

5. Один из углов треугольника равен $40°$. Известно, что его можно разбить отрезком на два равнобедренных треугольника. Найдите остальные углы данного треугольника.

6. Треугольник ABC можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину C. Найдите углы треугольника ABC.

7. Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.

8. В равнобедренном треугольнике ABC каждый из углов содержит нецелое число градусов. Известно, что через одну из вершин этого треугольника можно провести прямолинейный разрез, разбивающий его на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

9. Диагональ четырехугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите углы этого четырехугольника.

10. Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей имеет длину 2 и делит его на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырехугольника.

11. Каждая из трех прямых делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы этого четырехугольника.

Площади

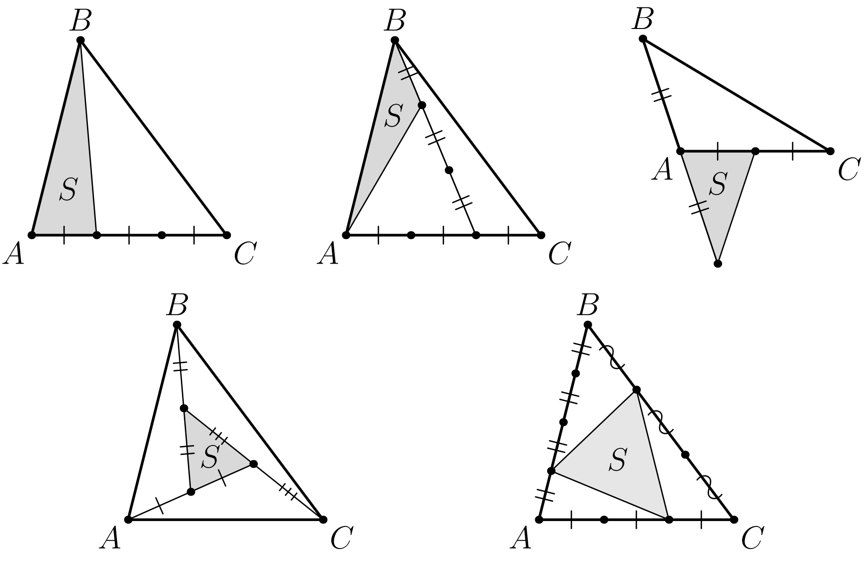
Каждой фигуре M на плоскости сопоставим число S_M, называемое *площадью*, обладающее следующими свойствами:
(1) площадь неотрицательна;
(2) площади равных фигур равны;
(3) площадь объединения фигур, не имеющих общих внутренних точек, есть сумма площадей фигур;
(4) площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

Факт 1. Пол в комнате площадью S покрыт линолеумом общей площадью S так, что нет участков, покрытых более чем в два слоя. Тогда площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу.

1. Дан параллелограмм $ABCD$.
(a) На прямой AD взята точка M. Площадь треугольника BMC равна S. Какова площадь параллелограмма? (Разберите все случаи).
(b) Пусть теперь точка M взята внутри параллелограмма и соединена со всеми вершинами. Общая площадь двух треугольников, примыкающих к сторонам AD и BC, равна S. Найдите площадь параллелограмма.

Факт 2. Даны две параллельные прямые AB и l. Тогда площадь треугольника ABC не зависит от от выбора точки C, находящейся на прямой l.

2. Выразите S_{ABC} через S.



3. Докажите, что площадь темно-серой части (рис. 1.1) равна сумме площадей светло-серых частей.

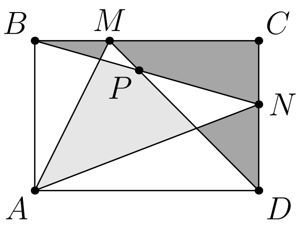


Рис. 1.1: к задаче 3

4. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что $S_{CDE} = S_{BDF}$.

5. Точка E — середина стороны BC треугольника ABC. Точки D и G на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $AD \perp BC$ и $GE \perp BC$. Докажите, что $S_{CGD} = S_{DGAB}$.

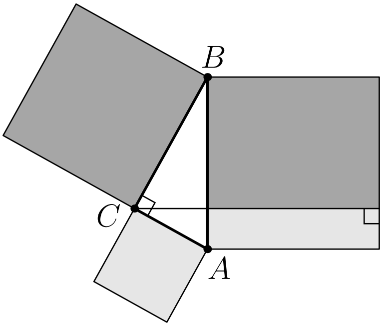


Рис. 1.2: к задаче 6

6. На сторонах прямоугольного треугольника ABC построены 3 квадрата (рис. 1.2). Докажите, что одноцветные площади попарно равны.
Итак, мы доказали *теорему Пифагора:* сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

7. В шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Через середину G диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC, пересекающая сторону DC в точке H. Докажите, что отрезок AH делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

9. Внутри правильного треугольника выбрали точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника от данного выбора не зависит. А верно ли это для правильного пятиугольника?

10. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q и R, делящие его стороны в отношениях $BP : PC = p, CQ : QA = q, AR : RB = r$. Чему равно отношение площадей треугольников PQR и ABC?

11. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на три равные части, и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что площадь центрального четырехугольника в девять раз меньше площади целого.

12. Каждая сторона выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ продолжена на свою длину так, что точка A_i — середина отрезка $A_{i-1}A'_i$, A_1 — середина отрезка $A_nA'_1$. Площадь исходного многоугольника равна S. Найдите площадь полученного многоугольника $A'_1A'_2...A'_n$.

ГМТ

Определение. *Геометрическое место точек* (сокращенно *ГМТ*), обладающих некоторым свойством, — это множество всех точек, для которых выполнено указанное свойство.

Простейшие примеры.
(a) ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние $R > 0$, — окружность;
(b) ГМТ, равноудаленных от концов отрезка, — серединный перпендикуляр к этому отрезку;
(c) ГМТ, равноудаленных от лучей данного угла, — биссектриса этого угла;
(d) ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность без двух точек;

Упражнение. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.

1. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек C таких, что
(a) $AC + BC = AB$;
(b) $AC < BC$;
(c) расстояние от C до какой-нибудь из двух точек A и B меньше длины отрезка AB;
(d) точка C — центр окружности, проходящей через точки A и B.
(e) Высота CH треугольника ABC равна h;
(f) медиана CM треугольника ABC равна m;
(g) треугольник ABC — равнобедренный;
(h) треугольник ABC — остроугольный;
(i) треугольник ABC — тупоугольный;
(j) $\angle B$ — второй по величине угол неравнобедренного треугольника ABC.

2. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ таких, что сумма расстояний от каждой из них до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых BC и AD.

3. Найдите геометрическое место внутренних точек прямоугольника $ABCD$ таких, что $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ADM} + S_{BCM}$.

4. **(a)** Найдите ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых.
(b) Выведите из пункта (a), что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — *центре вписанной окружности.*
(c) Выведите из пункта (a), что биссектриса внутреннего угла и две биссектрисы внешних углов треугольника пересекаются в одной точке — *центре вневписанной окружности.*

5. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $S_{ABX} = S_{CBX}$.
(b) Выведите из пункта (a), что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $AX^2 - XC^2 = AB^2 - BC^2$.
(b) Выведите из пункта (a), что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7. Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ верно $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

8. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по
(a) сторонам прямого угла; **(b)** окружности.
По какой траектории движется середина этого отрезка?

9. На плоскости даны точки A и B и прямая ℓ. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой ℓ?

10. Точки A и B движутся по окружности так, что хорда AB всегда проходит через фиксированную точку M внутри окружности. Найдите ГМТ, являющихся серединами отрезка AB.

Построение циркулем и линейкой

Простейшие построения:

- на прямой отложить от данной точки отрезок заданной длины;
- отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу;
- построить серединный перпендикуляр к данному отрезку;
- разделить данный угол пополам;
- из данной точки прямой восставить перпендикуляр к данной прямой;
- из данной точки вне прямой опустить перпендикуляр на эту прямую;
- построить прямую, параллельную данной, проходящей через заданную точку;
- построить треугольник по трем сторонам.

Обозначения в треугольнике ABC:
a, b, c — стороны треугольника;
m_a, m_b, m_c — медианы треугольника;
h_a, h_b, h_c — высоты треугольника;
P — периметр треугольника;
R — радиус описанной окружности треугольника;
r — радиус вписанной окружности треугольника.

1. Постройте треугольник ABC по
(a) $a, b, \angle B$; **(b)** $\angle A = 90^o, h_a, a$; **(c)** $\angle A = 15°, l_b, c$;
(d) R, a, b; **(e)** a, h_b, m_a; **(f)** $h_a, h_b, \angle C$;
(g) a, b, m_c; **(h)** m_a, m_b, c;
(i) m_b и отрезкам, на которые высота h_a делит сторону a;
(j) $\angle A, \angle B, r$; **(k)** $\angle A, \angle B, P$; **(l)** m_a, m_b, m_c.

2. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

3. На плоскости нарисована окружность. Через данную точку проведите к ней касательную.

4. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.

5. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых.

6. Постройте точку M внутри данного треугольника так, что $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.

7. Через
(a) вершину **(b)** точку на стороне

данного выпуклого четырехугольника проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

Разнобой (геометрия)

1. Постройте треугольник ABC, если дана прямая ℓ, на которой лежит сторона AB, и точки A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC и AC.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены параллелограммы; P — точка пересечения продолжений их сторон, параллельных AB и BC. На стороне AC построен параллелограмм, вторая сторона которого равна и параллельна BP. Докажите, что его площадь равна сумме площадей первых двух параллелограммов.

3. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, образованного медианами этого треугольника.

4. Постройте треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1, C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

5. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки X, лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проводится касающийся полуокружности луч и на нем откладывается отрезок XM, равный отрезку XO. Найдите ГМТ M, полученных таким образом.

6. Дан треугольник ABC. Найдите множество центров прямоугольников $PQRS$, вершины Q и P которых лежат на стороне AC, вершины R и S — на сторонах AB и BC соответственно.

7. **(a)** Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите ГМТ M таких, что $S_{ABM} + S_{MCD} = S$, где S — заданная величина.
   (b) Докажите, что для четырехугольника, в который можно вписать окружность, центр вписанной окружности и две середины его диагоналей лежат на одной прямой — *прямой Ньютона.*
   Подсказка: возьмите $S = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Глава 2

Додекаэдры (8-2)

НОД. Алгоритм Евклида

1. Докажите, что дробь $\frac{n^2+7n+13}{n+3}$ несократима при всех натуральных n.

2. Найдите НОД$(11! - 20, 10! - 20)$.

3. Найдите НОД$(11...1, 11...1)$:
(a) в первом числе 100 единиц, во втором 60;
(b) в первом числе m единиц, во втором n.

4. Найдите НОД$(2^{100} - 1, 2^{60} - 1)$.

5. Докажите, что НОД$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m,n)} - 1$.

6. Найдите НОД
(a) всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений;
(b) всех чисел, состоящих из 5 единиц и 7 двоек.

7. На столе лежат две кучки: в одной 1573 ореха, в другой 97900. Двое играют в игру: очередным ходом игрок может разложить любую кучку на две, одна из которых совпадает по размерам с уже имеющейся на столе. Кто выиграет при правильной игре?

8. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная на равносторонние треугольники со стороной 1. Двое играют в игру. За ход можно отломить треугольник с целой стороной, съесть его, а остаток передать сопернику. Также можно съесть последний треугольник со стороной 1. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Диофантовы уравнения

1. Пусть $(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) — некоторое целочисленное решения уравнения $ax + by = 1$. Докажите, что все решения этого уравнения в целых числах получаются по формулам $x = x_0 + kb$, $y = y_0 - ka$, где k — произвольное целое число.

2. Как описать в целых числах все решения уравнения $ax+by = c$ при произвольных целых a, b, c?

3. Как при помощи алгоритма Евклида найти какое-нибудь решение уравнения $ax+by = c$ (при условии, что оно существует)?

4. Решите в целых числах уравнения:
(a) $5x - 4y = 1$; **(b)** $9x + 15y = 4$; **(c)** $1500x + 501y = 2001$;
(d) $-27x + 12y = 15$; **(e)** $14x - 68y = 8$.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде отношения 7-й степени какого-то числа и 5-й степени какого-то числа.

6. На складе имеется тушенка в банках по 350 г и по 425 г. Для проведения операции «Буря в стакане» требуется 15 кг тушенки. Подскажите главному интенданту, сколько и каких банок заказать на складе.

7. Школьники ходили купаться на реку через большой песчаный пляж. Шедший последним Степа аккуратно провел на песке две черты, перпендикулярных направлению движения ребят, на расстоянии 10 метров друг от друга, и насчитал между ними ровно 559 следов. Сколько семиклассников ходило на реку, если известно, что длина шага каждого из них составляет 55 см?

8. Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. На раздачу явилось 11 членов профсоюза и 15 не-членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не-членам (всем хотя бы по одному слону!). Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

9. Все натуральные числа поделены на хорошие и плохие. Известно, что если число A хорошее, то и число $A+6$ тоже хорошее, а если число B плохое, то и число $B+15$ тоже плохое. Когда взяли N первых чисел, оказалось, что среди них плохих чисел в три раза меньше, чем хороших. Чему равно N?

10. Докажите, что если $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 1$$

разрешимо в целых числах.

11. Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x + 100y$, где x, y — натуральные, и синим цветом — все остальные точки. Найдите на прямой такую точку, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета.

Сравнения

1. Делится ли $5^{70} + 6^{70}$ на 61?

2. Целые числа a и b таковы, что $N = (31a + 57b)(57a + 31b)$ делится на 11. Докажите, что N делится на 121.

3. У числа 2018^{2018} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр, и т. д., пока не получилась цифра. А что это за цифра?

4. Докажите, что произведение первых n простых чисел, увеличенное на 1, не является точным квадратом.

5. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)

6. Пусть p — простое число. Может ли сумма чисел 2^p и 3^p оказаться степенью (выше первой) натурального числа?

7. Пусть p и q — последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p + q^q \vdots p + q$.

8. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \dots, 100$ на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй — на 203, а в третьей — на 304?

9. Для натуральных a и n докажите, что $a^{2n+3} + (a-1)^n \vdots a^2 - a + 1$.

10. На доске записано число 2018. За одну операцию разрешается в любое место числа вставить две одинаковые цифры. Можно ли в результате нескольких таких операций получить число, кратное 583?

11. При каких целых k число $a^3 + b^3 + c^3 - kabc$ делится на $a + b + c$ при любых целых a, b, c с ненулевой суммой?

12. Последовательность задана следующим образом: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_k \cdot a_{k+1} + 1$ при всех натуральных k. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 7$ число $a_n - 3$ является составным.

Ферма и Эйлер

Определение 1. *Полная система вычетов* по модулю m — это все остатки от деления на m, встречающиеся по одному разу.

Определение 2. *Приведённая система вычетов* по модулю m — это все остатки от деления на m, взаимно простые с m, встречающиеся по одному разу.

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, а a не делится на p. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое число, а p — простое. Тогда $a^p \equiv a \pmod{p}$.

1. **(a)** Вспомните бином Ньютона $(a+b)^n = a^n + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$, а также докажите, что C_p^l делится на p, где p — простое число, а $l < p$ — натуральное.
(b) Докажите малую теорему Ферма с помощью индукции.

2. **(a)** Пусть a не делится на p. Докажите, что множество остатков чисел $1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ при делении на p совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.
(b) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

3. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма.

4. Вершинам правильного $(p-1)$-угольника присвоим различные ненулевые остатки при делении на p. Проведем из остатка k стрелку в остаток ka.
(a) Докажите, что из каждой точки выходит одна стрелка, и в каждую точку входит одна стрелка, т. е. все стрелки разбиваются на циклы.
(b) Докажите, что у всех этих циклов одна и та же длина, делящая $p-1$, и выведите отсюда малую теорему Ферма.

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.

Упражнение 1. Найдите $\varphi(n)$ для всех натуральных $n \leqslant 20$.

Упражнение 2. Докажите, что если $n > 2$, то $\varphi(n)$ четно.

Теорема Эйлера. Натуральные a и n взаимно просты. Тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

5. **(a)** Приведите рассуждения, аналогичные задаче 2, и докажите теорему Эйлера.
(b) Приведите рассуждения, аналогичные задаче 4, и докажите теорему Эйлера.

6. **(a)** Пусть p и q — различные простые числа. Найдите $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(pq)$.

(b) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

(c) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — разложение n на простые множители. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Ферма и Эйлер — 2

1. Найдите остаток при делении 4^{1008} на
(a) 31; **(b)** 105; **(c)** 2018.

2. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1} \,\vdots\, p$.

3. Какой остаток дает число $42^{42^{42}}$ при делении на 2017?

4. Докажите, что $2^{n!} - 1 \,\vdots\, n$ для любого нечетного натурального n.

5. Докажите, что число $99^{100} + 100^{99}$ — составное.

6. Дана последовательность $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Найдутся ли в ней пять последовательных членов, делящихся на 12345?

7. При каких простых p число $5^{p^2} + 1$ делится на p?

8. **(a)** Докажите, что $n^{84} - n^4 \,\vdots\, 6800$ для любого натурального n.
(b) Можно ли 6800 заменить на какое-нибудь большее число, чтобы утверждение осталось верным?

9. Пусть p и q — различные простые числа. Какой остаток дает число $p^q + q^p$ при делении на pq?

10. На какие три цифры оканчивается число 7^{9999}?

11. Конечно ли множество чисел вида вида $2^n - 1$, у которых более миллиона различных простых делителей?

КТО и Вильсон

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7, 11 остатки 1, 2, 4, 6, 10 соответственно.

2. (a) Решите в целых числах уравнение $10x + 8 = 11y + 10$.
(b) Найдите все числа, дающие остаток 2 при делении на 8 и остаток 11 при делении на 13.

Китайская теорема об остатках. Пусть целые числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, $m = m_1 \ldots m_n$, а $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные целые числа. Тогда существует единственное целое число x такое, что $0 \leqslant x < m$ и

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

1. **(a)** Натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что число $x = (m_2 m_3 \ldots m_n)^{\varphi(m_1)}$ является решением системы

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n}. \end{cases}$$

(b) Найдите в явном виде число x, удовлетворяющее КТО.

2. Натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что если числа x_1, $x_2, \ldots, x_n$ пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, то число $x = x_1 m_2 \ldots m_n + m_1 x_2 \ldots m_n + \ldots + m_1 m_2 \ldots m_{n-1} x_n$ пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$. Выведите отсюда КТО.

3. Проникнитесь упражнением 2, и докажите КТО по индукции.

Теорема Вильсона. Пусть p — простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

4. Докажите, что для любого целого a, не делящегося на p, найдется целое b такое, что $ab \equiv 1 \pmod{p}$. Попробуйте разбить все ненулевые остатки при делении на p на пары обратных, и докажите теорему Вильсона.

5. Сколько существует ориентированных замкнутых ломаных, проходящих через все вершины правильного p-угольника? (Ломаные, совмещающиеся поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из нее теорему Вильсона.

6. Верна ли теорема Вильсона в обратную сторону? Если для натурального $p > 1$ верно $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, то обязательно ли p — простое число?

7. **(a)** Докажите, что для любого простого числа p вида $4k + 1$ существует целое число n такое, что $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

(b) Докажите, что для простых чисел p вида $4k + 3$ таких n не существует.

Числовой разнобой

1. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася – всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

2. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p \vdots p^2$.

3. Целые числа m и n взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать $(m + 2018n, n + 2018m)$?

4. Докажите, что для любого натурального k существует сколь угодно длинный отрезок из натуральных чисел, у каждого из которых есть хотя бы k различных простых делителей.

5. Пусть p и $p+2$ — простые числа. Докажите, что $2p(p+1)(p+2)$ является общим делителем чисел $p^{p+2} - p$ и $(p+2)^p - p - 2$.

6. Докажите, что для любого простого числа p найдётся число вида $2018^n - n$, делящееся на p.

7. Для каких натуральных n число $(n-1)! + 1$ является точной степенью числа n?

Индукция

1. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.

2. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что найдется хотя бы один чистый кусок.

3. Плоскость разбита прямыми на области. Докажите, что области можно раскрасить в два цвета так, чтобы граничащие области были разного цвета.

4. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

5. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.

6. В прямоугольнике $3\times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

7. Несколько человек не знакомы между собой. Докажите, что можно познакомить некоторых из них друг с другом так, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых.

8. При каких натуральных n квадрат можно разрезать на n меньших квадратов (не обязательно различных)?

9. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.

10. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

Индукция-2

1. На доске в ряд написаны числа 1 и 1. Каждую минуту между соседними числами вписывается их сумма. Какова сумма всех чисел через n минут?

2. Для всех натуральных $n \geqslant 3$ докажите, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$.

3. Докажите, что любое целое число единственным образом представимо в виде суммы некоторых из чисел $1, -2, 4, \ldots, (-2)^n, \ldots$

4. Из чисел от 1 до $2n$ выбраны $n+1$ чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

5. Докажите, что любая правильная дробь может быть представлена в виде суммы различных чисел, обратных к целым.

6. Докажите, что $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$, где f_n — n-е число Фибоначчи.

7. При каких натуральных n число 1 можно представить в виде суммы n обратных величин попарно различных натуральных чисел?

8. Назовем число *интересным*, если оно на 1 больше некоторого точного квадрата. Докажите, что произведение любых нескольких интересных чисел представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

9. Пусть $s(n)$ — это количество разбиений натурального числа n в упорядоченную сумму степеней двойки (например, $s(4) = 6$). Найдите наименьшее $n > 2018$ такое, что $s(n)$ нечетно.

10. Для всех натуральных n докажите, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Принцип крайнего

1. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что найдется ладья, бьющая не более двух других.

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если
(a) $k = 9$; **(b)** $k = 8$?

3. 23 семиклассника бегают по футбольному полю с шишками в руках. По свистку все они останавливаются, и каждый кидает шишкой в ближайшего к нему семиклассника (все расстояния между ними различны). Докажите, что в какого-то семиклассника шишка не полетит.

4. В круге радиуса 1 отметили восемь точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 1.

5. В клетках таблицы 8×8 расставлены 64 различных целых числа. Докажите, что найдутся две соседние по стороне клетки, числа в которых отличаются хотя бы на 5.

6. 7 грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что какие-то трое грибников собрали не меньше, чем остальные четверо.

7. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены n^2 различных чисел. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.

8. На прямой выбрали $2n + 1$ отрезков. Известно, что любой из них пересекается (хотя бы по точке) хотя бы с n другими. Докажите, что найдется отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

9. На конгресс собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе одинаковое число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, имеющий на конгрессе ровно одного друга.

10. *Теорема Сильвестра.* На плоскости даны n точек. Оказалось, что на любой прямой, проходящей через любые две из них, лежит еще хотя бы одна точка. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

Анализ информации — 1

1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если

(a) каждый следующий вопрос задается после того, как получен ответ на предыдущий вопрос;

(b) надо заранее сказать все вопросы?

2. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

3. Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стерлись, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Хватит ли ему для этого

(a) четырех; **(b)** трех

взвешиваний?

4. Имеется 1000 бутылок с вином, в одной вино испорчено, и 10 белых мышей. Если мышь выпьет плохого вина, то через минуту станет фиолетовой. Разрешается один раз накапать каждой мыши вина из разных бутылок, дать им выпить одновременно и подождать минуту. Как найти испорченное вино?

5. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть

(a) 1 орех; **(b)** 2 ореха.

Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

6. **(a)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

(b) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

7. **(a)** В жюри олимпиады 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам жюри, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберется не менее 6 членов жюри?

(b) Круглая арена цирка освещается n разными прожекторами. Каждый прожектор освещает некую выпуклую фигуру, причем если выключить любой один прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить любые два — будет освещена не полностью. При каких n такое возможно?

8.* Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому колпак одного из 1000 цветов. После этого глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или черную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Как мудрецам заранее договориться, чтобы это удалось?

9.* Есть n разных ключей от n разных замков (каждый ключ подходит ровно к одной двери). За какое наименьшее число попыток можно гарантированно узнать, какую дверь открывает какой ключ?

Анализ информации — 2

1. В деревне живут 64 хоббита, каждый — в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит посещает всех, кого можно застать дома, причем если он идет в гости, то у себя дома в этот вечер уже не появляется. Могут ли хоббиты действовать так, чтобы за 6 вечеров среди любых двух жителей деревни хотя бы один побывал в гостях у другого?

2. Вам и мне надевают на голову шляпу. Каждая шляпа либо черная, либо белая. Вы видите мою шляпу, я — вашу, но никто не видит своей шляпы. Каждый из нас (не подглядывая и не подавая друг другу никаких сигналов) должен попытаться угадать цвет своей шляпы. Для этого по команде одновременно каждый называет цвет — «черный» или «белый». Если хоть один угадал — мы выиграли. Перед этим нам дали возможность посовещаться. Как действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?

3. **(a)** Мудрецам предстоит испытание: им завяжут глаза, наденут каждому черный или белый колпак, построят в колонну и развяжут глаза. Затем мудрецы по очереди, начиная с последнего (который видит всех), будут называть цвет своего колпака. Кто ошибется — тому голову с плеч. Сколько мудрецов гарантированно может спастись? (Каждый видит всех впереди стоящих; у мудрецов до испытания есть время, чтобы договориться.)
(b) А если колпаки могут быть k данных цветов?
(c*) А если колпаки могут быть 100 данных цветов, 100 мудрецов стоят по кругу (видят друг друга) и называют цвета своих колпаков одновременно, и нужно, чтобы цвет своего колпака угадал хотя бы один?

4. **(a)** В тюрьме 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы уже не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, можно оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, я всех выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-то забудут, — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.
(b) А если неизвестно, была ли лампа в самом начале включена или нет?

5. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это целое число
(a) от 1 до 900; **(b*)** от 1 до 1700.
Два шпиона узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду один или несколько камней, потом — второй, потом — опять первый, и т. д. до тех пор, пока камни не кончились. Затем шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.)

6. Имеются 8 монет, семь из которых одинаковые, а одна фальшивая и отличается по весу (неизвестно, в какую сторону). Также есть чашечные весы, которые показывают правильный результат, если на чашах разный вес, а если вес одинаковый, то вместо равенства показывают что попало.

(a) Придумайте способ найти фальшивую монету и узнать, тяжелее она настоящих или легче.

(b) Можно ли гарантированно найти фальшивую монету всего за 4 взвешивания?

7. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие — орлом вверх, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое число от 1 до N и показать всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

(a) Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = a$, то есть способ и для $N = 2a$.

(b) Найдите все N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

8. Ботанический определитель использует 100 признаков. Каждый признак либо есть у растения, либо нет. Определитель «хороший», если любые два растения в нем отличаются более чем по 50 признакам. Может ли хороший определитель описывать более 50 растений?

Догонялки на плоскости

Конус Маха

1. В поле проходит прямая дорога, по ней со скоростью 10 км/ч едет автобус. Укажите все точки поля, из которых можно догнать автобус, если бежать
(a) с той же скоростью; **(b)** со скоростью 5 км/ч.

2. Самолет, летящий в два раза быстрее скорости звука, вылетел из точки A и летит в точку B по прямой. Самолет непрерывно издает звук, который распространяется во все стороны. Нарисуйте все точки, до которых успеет дойти звук самолета за время, пока самолет летит из A в B. (Считайте, что всё происходит в плоскости.)

3. В поле проходит прямая дорога. Человек, стоящий на дороге в точке A, может идти по полю со скоростью не более 3 км/ч и по дороге со скоростью не более 6 км/ч. Нарисуйте, куда он может попасть за 1 ч.

4. В поле проходят две перпендикулярные друг другу прямые дороги. Человек, стоящий на перекрестке, может идти по полю со скоростью не более 3 км/ч и по дорогам со скоростью не более
(a) 6 км/ч; **(b)** $3\sqrt{2}$ км/ч.
Нарисуйте все точки, в которые он может попасть за 1 час.

5. Пункт A находится в лесу в 5 км от прямой дороги, пункт B — на дороге, расстояние от A до B — 13 км (по полю). Скорость пешехода на дороге — 5 км/ч, в лесу — 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет попасть из A в B?

Найди стратегию

6. Миша стоит в центре круглой лужайки радиуса 100 м. Каждую минуту он шагает на 1 м, заранее объявляя, в каком направлении хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы когда-нибудь гарантированно выйти с лужайки?

7. В центре квадрата сидит заяц, в каждом углу — волк. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки бегают лишь по сторонам квадрата с максимальной скоростью, которая больше максимальной скорости зайца в 1,4 раза?

8. На плоскости играют волк и несколько овец. Сначала ходит волк, потом какая-нибудь овца, потом волк, потом опять какая-нибудь овца, и т. д. И волк, и овцы передвигаются за ход в любую сторону не более, чем на 1 м. Для любого ли числа овец существует такая начальная позиция, что волк не поймает ни одной овцы?

9. Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии — улицы, клеточки — кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (его местонахождение неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции — увидеть бандита. Есть ли у милиции алгоритм наверняка достигнуть своей цели? Максимальные скорости милиции и бандита — какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние.

Ловим в несколько этапов

10. На плоскости играют Левша и невидимая блоха. За ход Левша проводит прямую, а блоха прыгает на 1 м, не пересекая ни одной прямой Левши. Если блоха не может сделать ход, она становится видимой и сдается. Может ли Левша гарантированно выиграть?

11. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой, и едет по бесконечной в обе стороны дороге. Полицейский на новой машине не знает, ни когда машину угнали (это могло случиться сколь угодно давно), ни в каком направлении уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?

12.* На бесконечной клетчатой сетке (линии — улицы, клетки — кварталы) трое полицейских ловят вора. Местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам. Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Смогут ли полицейские гарантированно поймать вора? (Полицейские тоже движутся только по улицам.)

Геометрия на клетчатой бумаге

1. Постройте центр окружности, проходящей через точки A, B и C (рис. 1).
2. Постройте какой-нибудь треугольник, две медианы которого взаимно перпендикулярны.
3. Постройте центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 3).
4. Постройте точку, симметричную точке C относительно прямой AB (рис. 4).

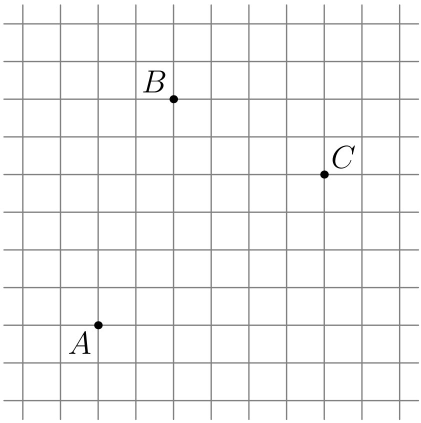


Рис. 1

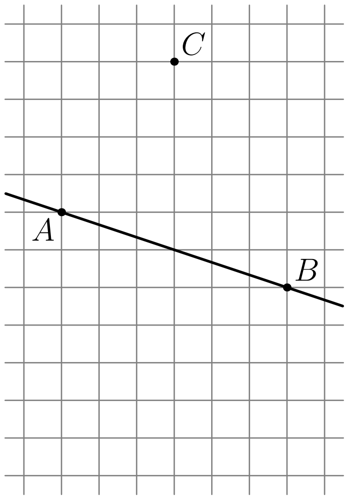


Рис. 4

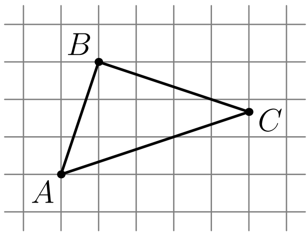


Рис. 3

5. Найдите:

(a) угол между прямыми AE и DQ (рис. 5a);

(b) угол AKM (рис. 5b).

6. Докажите, что углы MAN и BPM равны (рис. 6).

7. Не выходя за пределы листа размера 3×3, докажите равенство углов A и B (рис. 7).

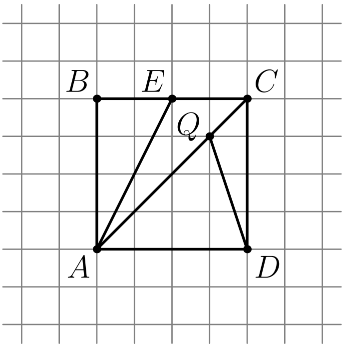


Рис. 5a

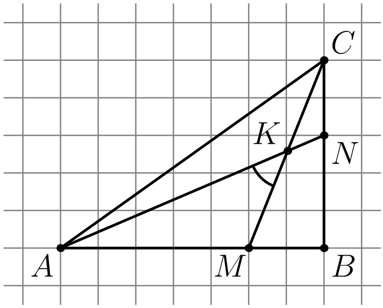


Рис. 5b

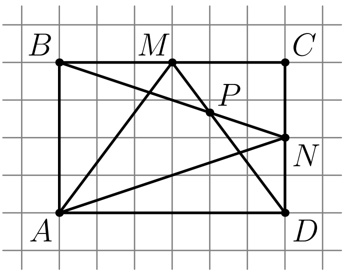


Рис. 6

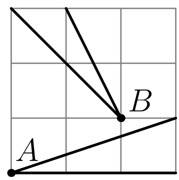


Рис. 7

8. Дан шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 8). Докажите, что равны площади треугольников ACE и BDF.

9. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого составляет 4/5 клетки.

10. **(a)** Найдите сумму трех углов, обозначенных на рис. 10a.

(b) Найдите сумму пяти углов MAN, MBN, MCN, MDN и MEN на рис. 10b.

(c) От квадрата $ABCD$ «отрезали» треугольник MND, как показано на рис. 10c. Найдите сумму трех углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

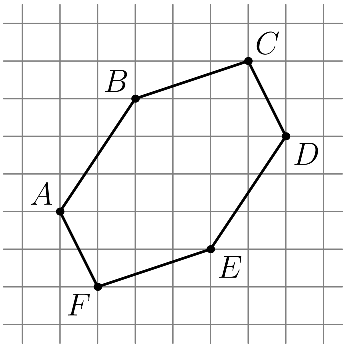


Рис. 8

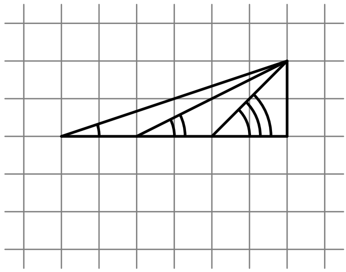


Рис. 10a

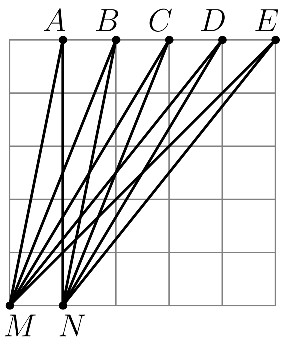


Рис. 10b

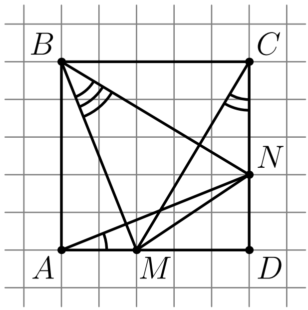
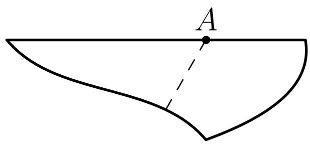


Рис. 10c

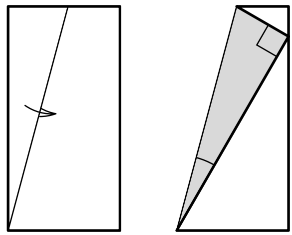
Перегибая бумагу, получаем задачу

1. У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, а потом разогнули обратно. A — общая точки линии сгиба и ровного края (рисунок справа). Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A, используя только перегибание бумаги.

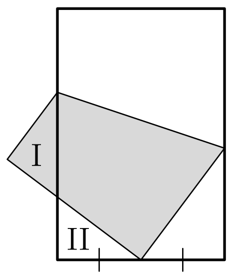


2. Бумажный прямоугольник согнули по диагонали, а затем, сложив еще два раза, получили четырехслойный треугольник. Найдите угол между стороной и диагональю исходного прямоугольника.

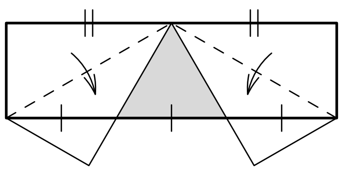
3. Квадратный лист бумаги сначала сложили вдвое, а затем так, как показано на рисунке справа. Чему равен отмеченный угол?



4. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рисунок справа). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



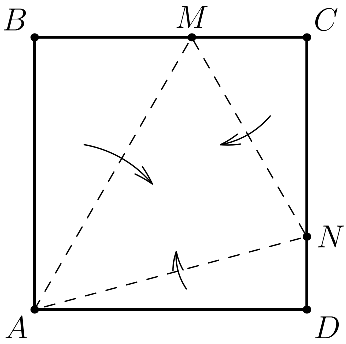
5. Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке справа. Противоположная сторона при этом оказалась разделенной на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник — равносторонний.

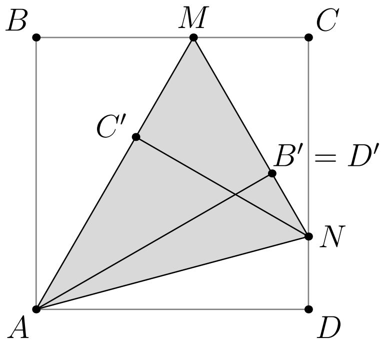


6. Прямоугольный лист бумаги перегнули по прямой так, что противоположные вершины совместились. В результате получились три треугольника: в середине — один двухслойный, а по краям — два однослойных. Докажите, что двухслойный треугольник — равнобедренный.

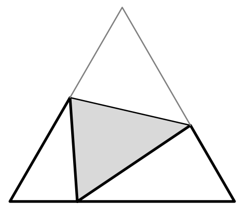
7. Бумажный прямоугольник $ABCD$ перегибается так, что точка C попадает в точку C' — середину стороны AD. Найдите отношение $DK : AB$, где K — точка линии сгиба на стороне CD.

8. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник MAN (рисунки ниже). Найдите угол ANM.





9. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (рисунок справа). Докажите, что углы двух получившихся белых треугольников соответственно равны.



10. Из листа бумаги, одна сторона которого желтая, а другая — белая, Саша вырезал равнобедренный треугольник. Затем он перегнул его по биссектрисе угла при основании и склеил. Получился треугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников: белого и желтого. Докажите, что после перегибания у него вновь получился равнобедренный треугольник.

11. Возьмём бумажный квадрат $ABCD$. Пусть M — середина CD. Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M, а середина AD попала на диагональ AC. Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим MX. Теперь согнем квадрат так, чтобы сгиб снова проходил через точку M, а середина BC попала на диагональ BD. Разогнем лист, отрезок сгиба обозначим MY. Докажите, что треугольник MXY — равносторонний.

12. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, наложил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провел диагональ, опустил на нее перпендикуляры из двух остальных вершин, после чего разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону так, что вместе с нижним прямоугольником они образовали еще один прямоугольник. Каким образом по полученному прямоугольнику восстановить исходный, используя только циркуль и линейку?

Разобьем на равнобедренные треугольники

1. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.
2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?
3. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. В каком отношении эта прямая может разделить угол треугольника?
4. Про треугольник, один из углов которого равен 120°, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?
5. Один из углов треугольника равен 40°. Известно, что его можно разбить отрезком на два равнобедренных треугольника. Найдите остальные углы данного треугольника.
6. Треугольник ABC можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину C. Найдите углы треугольника ABC.
7. Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.
8. В равнобедренном треугольнике ABC каждый из углов содержит нецелое число градусов. Известно, что через одну из вершин этого треугольника можно провести прямолинейный разрез, разбивающий его на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.
9. Диагональ четырехугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите углы этого четырехугольника.
10. Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей имеет длину 2 и делит его на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырехугольника.
11. Каждая из трех прямых делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы этого четырехугольника.

Площади

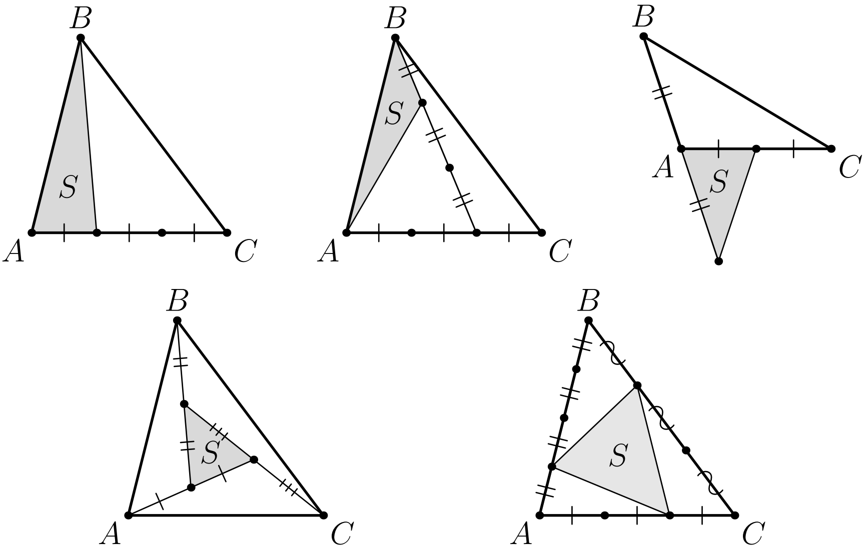
Каждой фигуре M на плоскости сопоставим число S_M, называемое *площадью*, обладающее следующими свойствами:
(1) площадь неотрицательна;
(2) площади равных фигур равны;
(3) площадь объединения фигур, не имеющих общих внутренних точек, есть сумма площадей фигур;
(4) площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

Факт 1. Пол в комнате площадью S покрыт линолеумом общей площадью S так, что нет участков, покрытых более чем в два слоя. Тогда площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу.

Факт 2. Даны две параллельные прямые AB и l. Тогда площадь треугольника ABC не зависит от от выбора точки C, находящейся на прямой l.

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M взята внутри параллелограмма и соединена со всеми вершинами. Общая площадь двух треугольников, примыкающих к сторонам AD и BC, равна S. Найдите площадь параллелограмма.

2. Выразите S_{ABC} через S.



3. Докажите, что площадь темно-серой части (рис. 2.1) равна сумме площадей светло-серых частей.

4. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие AB и AC соответственно в точках E и F.

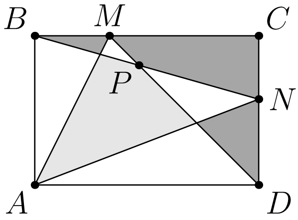


Рис. 2.1: к задаче 3

Докажите, что $S_{CDE} = S_{BDF}$.

5. Точка E — середина стороны BC треугольника ABC. Точки D и G на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $AD \perp BC$ и $GE \perp BC$. Докажите, что $S_{CGD} = S_{DGAB}$.

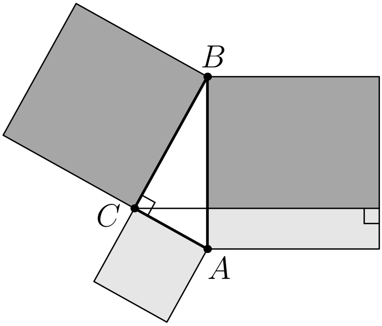


Рис. 2.2: к задаче 6

6. На сторонах прямоугольного треугольника ABC построены 3 квадрата (рис. 2.2). Докажите, что одноцветные площади попарно равны.
Итак, мы доказали *теорему Пифагора:* сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

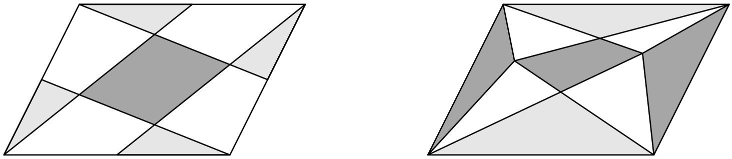
7. В шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Через середину G диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC, пересекающая сторону DC в точке H. Докажите, что отрезок AH делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

9. Внутри правильного треугольника выбрали точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника от данного выбора не зависит. А верно ли это для правильного пятиугольника?

Площади. Добавка

1. Докажите, что на рисунке слева площадь темно-серой части равна сумме площадей светло-серых частей.



2. Докажите, что на рисунке справа сумма площадей темно-серых частей равна сумме площадей светло-серых частей.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

4. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q и R, делящие его стороны в отношениях $BP : PC = p, CQ : QA = q, AR : RB = r$. Чему равно отношение площадей треугольников PQR и ABC?

5. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на три равные части, и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что площадь центрального четырехугольника в девять раз меньше площади целого.

6. Каждая сторона выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ продолжена на свою длину так, что точка A_i — середина отрезка $A_{i-1}A'_i$, A_1 — середина отрезка $A_nA'_1$. Площадь исходного многоугольника равна S. Найдите площадь полученного многоугольника $A'_1A'_2...A'_n$.

ГМТ

Определение. *Геометрическое место точек* (сокращенно *ГМТ*), обладающих некоторым свойством, — это множество всех точек, для которых выполнено указанное свойство.

Простейшие примеры.
(a) ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние $R > 0$, — окружность;
(b) ГМТ, равноудаленных от концов отрезка, — серединный перпендикуляр к этому отрезку;
(c) ГМТ, равноудаленных от лучей данного угла, — биссектриса этого угла;
(d) ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность без двух точек;

Упражнение. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.

1. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек C таких, что
   (a) $AC < BC$;
   (b) расстояние от C до какой-нибудь из двух точек A и B меньше длины отрезка AB;
   (c) Высота CH треугольника ABC равна h;
   (d) медиана CM треугольника ABC равна m;
   (e) треугольник ABC — равнобедренный;
   (f) треугольник ABC — тупоугольный;
   (g) $\angle B$ — второй по величине угол неравнобедренного треугольника ABC.

2. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ таких, что сумма расстояний от каждой из них до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых BC и AD.

3. **(a)** Найдите ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых.
   (b) Выведите из пункта (a), что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — *центре вписанной окружности.*
   (c) Выведите из пункта (a), что биссектриса внутреннего угла и две биссектрисы внешних углов треугольника пересекаются в одной точке — *центре вневписанной окружности.*

4. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $S_{ABX} = S_{CBX}$.
   (b) Выведите из пункта (a), что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $AX^2 - XC^2 = AB^2 - BC^2$.
   (b) Выведите из пункта (a), что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

6. Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ верно $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

Построение циркулем и линейкой

Простейшие построения:

- на прямой отложить от данной точки отрезок заданной длины;
- отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу;
- построить серединный перпендикуляр к данному отрезку;
- разделить данный угол пополам;
- из данной точки прямой восставить перпендикуляр к данной прямой;
- из данной точки вне прямой опустить перпендикуляр на эту прямую;
- построить прямую, параллельную данной, проходящей через заданную точку;
- построить треугольник по трем сторонам.

Обозначения в треугольнике ABC**:**
a, b, c — стороны треугольника;
m_a, m_b, m_c — медианы треугольника;
h_a, h_b, h_c — высоты треугольника;
P — периметр треугольника;
R — радиус описанной окружности треугольника;
r — радиус вписанной окружности треугольника.

1. Постройте треугольник ABC по
(a) $\angle A = 90^o, h_a, a$; **(b)** R, a, b; **(c)** a, h_b, m_a;
(d) $h_a, h_b, \angle C$; **(e)** a, b, m_c; **(f)** m_a, m_b, c;
(g) m_b и отрезкам, на которые высота h_a делит сторону a;
(h) $\angle A, \angle B, r$; **(i)** $\angle A, \angle B, P$; **(j)** m_a, m_b, m_c.

2. На плоскости нарисована окружность. Через данную точку проведите к ней касательную.

3. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.

4. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых.

5. Постройте точку M внутри данного треугольника так, что $S_{ABM} : S_{BCM} : S_{ACM} = 1 : 2 : 3$.

Глава 3

Тетраэдры (9-1)

Метод Штурма

1. Неравенства между средними (слева на право: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\,.$$

(a) Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

(b) Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным.

(c) Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим.

2. *Неравенство Гюйгенса.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, t — их среднее геометрическое. Докажите неравенство:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+t)^n\,.$$

3. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant (n-1)^n\,.$$

4. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2\cdot n!\,.$$

5. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)} \geqslant \frac{1}{3}\,.$$

6. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\,.$$

Максимум на конце отрезка

0. Пусть a — положительное число. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{k=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_{k-1})a_k(a-a_{k+1})\dots(a-a_n)\,,$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат отрезку $[0;a]$.

1. Пусть $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$. Докажите, что

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d \geqslant 1\,.$$

2. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит $1/2$.

3. Пусть $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

4. Пусть действительные числа x, y, z лежат на отрезке $[0;1]$. Докажите, что

$$3(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)-2xyz(x+y+z) \leqslant 3\,.$$

5. Докажите, что для любых чисел a, b, c из отрезка $[0;1]$ выполнено неравенство:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1\,.$$

6. Докажите, что если $1 \leqslant x_k \leqslant 2$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2 \leqslant n^3\,.$$

7. Дан связный граф G, в вершинах которого расставили неотрицательные числа с суммой 1, после чего для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах и сложили полученные числа для всех ребер. Выразите максимальное возможное значение рассмотренной суммы через размер максимальной клики в графе.

Кликой неориентированного графа называется подмножество его вершин, любые две из которых соединены ребром.

Комбинаторная теория чисел

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если l — нечетное число, не делящееся на 5.

3. Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение
$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

4. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

5. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, $\times$, $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

6. Назовем число *хорошим,* если его простые делители принадлежат множеству $\{2, 3, 5\}$. Записали 81 хорошее число. Докажите, что из них можно выбрать четыре числа, произведение которых точная четвертая степень.

7. Дано натуральное число k. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка является суверенным государством, а на каждом ребре стоит таможня, взимающая натуральное число талеров в качестве взятки за ее пересечение (в обоих направлениях — одинаковое, но, возможно, различное для разных границ). Докажите, что существует такой замкнутый маршрут, не заходящий ни в какую клетку дважды, что суммарная взятка на нем кратна k.

Разнобой по теории чисел

1. Пусть a — нечетное число. Докажите, что числа $a^{2^n} + 2^{2^n}$ и $a^{2^m} + 2^{2^m}$ взаимно просты при любых натуральных $n \neq m$.

2. Пусть a и b — такие различные натуральные числа, что $ab(a+b)$ делится на $a^2 + ab + b^2$. Докажите, что $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

3. Найдите все натуральные n, для которых $n^n + 1$ и $(2n)^{2n} + 1$ являются простыми.

4. Найдите все натуральные n такие, что

$$n \mid 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \,.$$

5. Докажите, что в последовательности чисел $2^n - 3$, где $n = 1, 2, \ldots$, существует набор из 2018 попарно взаимно простых чисел.

Конечные множества. Отображение конечных множеств

1. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные m элементов не стоят рядом?

2. Докажите, что при любом натуральном n число C_{2n}^n делится на $n+1$.

3. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m имеют общий делитель, отличный от 1.

4. Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

5. Найдите сумму $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \ldots + n^2C_n^n$.

6. Докажите тождество $\sum \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = k^n$, где суммирование производится по всем упорядоченным разбиениям числа n на k слагаемых.

7. В множестве A зафиксирован набор подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Разрешается брать пересечения и объединения имеющихся множеств, а также их дополнения до множества A. Сколько различных подмножеств множества A можно получить таким способом?

8. Докажите, что число $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(n+m)!}$ — целое.

9. Для любой упорядоченной пары подмножеств A, B (не обязательно различных) n-элементного множества подсчитано число элементов в пересечении $A \cap B$, а затем все эти числа просуммированы. Чему равна полученная сумма?

Числа Стирлинга и числа Белла

Обсуждение

- Сколькими способами можно разбить 4-элементное множество на два подмножества?
- Сколькими способами можно разбить 7-элементное множество на 4 подмножества?

Число Стирлинга S_n^k равно количеству способов, которыми можно разбить n-элементное множество на k подмножеств.

Упражнения

1. Найдите $\mathrm{S}_n^1, \mathrm{S}_n^2, \mathrm{S}_n^n$.
2. Найдите S_5^3.

Подсказка. Пусть четыре элемента вы уже расположили. Как можно подложить к ним пятый?

Рекуррентное соотношение: $\mathrm{S}_n^k = \mathrm{S}_{n-1}^{k-1} + k\mathrm{S}_{n-1}^k$.

3. Постройте несколько первых строк треугольника Стирлинга.

Обсуждение

- Сколькими способами можно разбить 4-элементное множество на непересекающиеся подмножества?
- Сколькими способами можно разбить 7-элементное множество на непересекающиеся подмножества?

Число Белла B_n равно количеству способов, которыми можно разбить n-элементное множество на непересекающиеся подмножества (возможно одно):

$$\mathrm{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}_n^i\,.$$

4. Найдите B_7.

Задачи

1. Докажите рекуррентное соотношение:

$$\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \mathrm{B}_i\,.$$

2. Найдите число всех сюрьективных отображений n-элементного множества на k-элементное.

3. В n-элементном множестве выделили несколько подмножеств, содержащих $x_1, x_2, \dots, x_k$ элементов соответственно. Известно, что ни одно из этих множеств не содержится в другом. Докажите неравенство

$$\frac{1}{C_n^{x_1}} + \frac{1}{C_n^{x_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{x_n}} \leqslant 1.$$

4. Обозначим следующий многочлен $[x]_k = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$. Докажите равенство

$$x^n = \sum_k \alpha(n,k)[x]_k$$

и найдите коэффициенты $\alpha(n,k)$.

5. Назовем *лестницей высоты n* фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

6. Каждый элемент треугольника Лейбница равен сумме элементов, стоящих под ним, а числа на границах строк фиксированы. Найдите разумную формулу для элемента, стоящего на k-м месте строки с номером n.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

7. Докажите равенство

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha(n,k)\frac{1}{x+k}$$

и найдите коэффициенты $\alpha(n,k)$.

Ориентированные графы

Ориентированный граф — конечное множество вершин, некоторые из которых соединены стрелками. В ориентированном графе запрещены кратные стрелки (даже в разных направлениях) и петли, если не оговорено иное. Ориентированный граф *полный*, если любая пара его вершин соединена единственной стрелкой. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно добраться до любой другой по стрелкам.

1. Докажите, что компоненты сильной связности полного ориентированного графа можно пронумеровать так, чтобы стрелки между компонентами вели из компонент с меньшим номером в компоненты с бóльшим.

2. Любые два города Табулистана соединены дорогой с односторонним движением. В стране транспортные проблемы: нет сильной связности. Докажите, что можно раздать все города республиканцам и демократам так, чтобы обе партии получили хотя бы по одному городу и чтобы никакая дорога не вела из города республиканцев в город демократов.

3. В условиях предыдущей задачи, если городов хотя бы три, на каком наименьшем числе дорог президенту Табулистана надо изменить направление движения, чтобы решить транспортные проблемы and make Tabulistan great again?

4. Докажите, что в полном ориентированном сильно связном графе на $n \geqslant 3$ вершинах через каждую его вершину проходит
(a) простой цикл длины 3;
(b) простой цикл любой длины k, где $3 \leqslant k \leqslant n$.

5. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно добраться до любого другого, не выезжая за пределы республики.

6. Докажите, что в полном ориентированном графе на $n \geqslant 7$ вершинах всегда найдется вершина, инвертированием всех стрелок в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.

7. Докажите, что в полном ориентированном графе на n вершинах ($n \geqslant 4$) существует такой гамильтонов путь $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_n$, что $v_1 \to v_n$, если
(a) n — четное; **(b)** n — нечетное.

Вариация

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2017. Найдите максимально возможное их произведение.

3. В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n+1$ человек: $p_1, p_2, \dots, p_{2n+1}$ (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Обозначим через w_i число побед игрока p_i. Найдите максимум и минимум (в зависимости от n) величины $w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_{2n+1}^2$.

4. По окружности расставлены несколько положительных чисел, не превосходящих единицы. Докажите, что окружность можно разбить на 2018 дуг так, чтобы суммы чисел на соседних дугах отличались не более чем на один. Если чисел на дуге нет, то сумма чисел на дуге считается равной нулю.

5. Председателю дачного кооператива необходимо распределить 49 квадратных участков (в виде квадрата 7×7) среди 49 дачников. Каждый дачник враждует не более чем с 6 другими. Докажите, что это можно сделать так, чтобы никакие два враждующих дачника не получили соседние по стороне участки.

6. В таблице $n \times m$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.

7. *Хромой ладьей* назовем ладью, которая за один ход может сдвинуться только на одну клетку. Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число ее ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.

Сколь угодно много и бесконечно много

1. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

2. Зафиксировано натуральное число n. Будем говорить, что числовая строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *лексикографически больше* числовой строки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если есть такой $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i > y_i$.
Лемма. Докажите, что не существует бесконечной лексикографически убывающей последовательности строк длины n, состоящих из натуральных чисел.

3. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдется бесконечный простой путь.

4. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются *словами*. Некоторые конечные слова объявлены *матерными*. Слово называется *цензурным*, если оно не содержит матерных подслов.
(a) Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.
(b) Известно, что матерных слов конечное число и существует бесконечное цензурное слово. Докажите, что существует бесконечное периодическое цензурное слово.
(c) Останется ли верным утверждение предыдущего пункта, если снять ограничение на конечность множества матерных слов?

5. Сборная Табулистана с 2000 года ежегодно участвует в финале всероссийской олимпиады школьников по математике, которая проводится по параллелям 9, 10, 11 класса. Год n называется *провальным*, если для каждого предыдущего года m существует параллель, по которой в год n сборная Табулистана взяла меньше дипломов, чем в год m. Могут ли все годы участия, начиная с 2001, быть провальными?

6. Натуральные числа покрашены в несколько цветов. Докажите, что найдутся цвет X и число m такие, что для любого натурального k существуют натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ цвета X, где $a_{i+1} - a_i < m$ при всех $1 \leqslant i < k$.

7. Мудрецы выстроены в бесконечный ряд. На каждом — колпак одного из двух цветов. Каждый мудрец знает свой номер в ряду и видит всех мудрецов с большими номерами. Мудрецы по команде должны одновременно назвать предполагаемый цвет своего колпака. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о стратегии так, чтобы при любой расстановке колпаков не угадало цвет своего колпака лишь конечное число мудрецов.

Тройки Штейнера и другие системы подмножеств

Обсуждение

Антицепь из подмножеств — это набор подмножеств, никакие два из которых друг в друга не вложены.

Теорема Шпернера об антицепях. Самая большая антицепь в n-элементном множестве содержит $C_n^{[n/2]}$ подмножеств.

1. Сколько полных цепей существует в n-элементном множестве?

2. Подмножество A множества X содержит k элементов. Сколько существует полных цепей, содержащих подмножество A?

3. В n-элементном множестве выделили несколько подмножеств, содержащих x_1, x_2, ..., x_k элементов соответственно. Известно, что ни одно из этих множеств не содержится в другом. Докажите неравенство

$$\frac{1}{C_n^{x_1}} + \frac{1}{C_n^{x_2}} + \ldots + \frac{1}{C_n^{x_n}} \leqslant 1\,.$$

4. Докажите теорему Шпернера.

Задачи

1. Комиссия состоит из 100 человек. На каждое заседание приходит три члена комиссии. Может ли через некоторое время получиться так, что любые два члена комиссии встретятся на заседаниях ровно один раз? Тот же вопрос, если в комиссии 101 человек.

Определение. Пусть дано некоторое конечное множество. *Системой троек Штейнера* этого множества называется такой набор его трехэлементных подмножеств, что любая пара элементов этого множества встречается ровно в одном подмножестве.

2. Пусть для некоторого n-элементного множества удалось построить систему троек Штейнера. Анализируя решения задачи 1, установите необходимое условие на число n.

3. Построить систему троек Штейнера для 7-элементного множества, 21-элементного множества, 49-элементного множества.

4. Известно, что система троек Штейнера существует для m-элементного и для n-элементного множества. Доказать, что она существует и для множества, содержащего mn элементов.

5. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

6. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

7. Множество A содержит 101 число, не превосходящее миллиона. Сдвигом множества A называется множество чисел, каждое из которых получается прибавлением ко всем его элементам некоторого фиксированного числа, также не превосходящего миллиона. Докажите, что найдется сто попарно не пересекающихся сдвига множества A.

Дополнительные задачи по комбинаторике

1. Последовательность a_n натуральных чисел называется *полиномиальной,* если существует многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $a_n = P(n)$ при всех натуральных n. Можно ли раскрасить натуральные числа в два цвета так, чтобы не было одноцветных полиномиальных последовательностей?

2. Стрелки полного ориентированного графа раскрашены в два цвета. Докажите, что в нем существует вершина, от которой можно добраться до любой другой вершины по некоторому монохромному пути одного из двух цветов.

3. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

4. Докажите, что на ребрах любого графа можно расставить стрелки так, чтобы для каждой вершины модуль разности входящей и исходящей ее степени не превосходил 1.

5. Рассмотрим перестановку $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{70})$ чисел $1, 2, \dots, 70$. За один ход разрешается поменять два числа местами. Нашей целью является получить набор $(1, 2, \dots, 70)$ из σ. Обозначим через $N(\sigma)$ минимальное число ходов, которые приводят к цели из перестановки σ. Найдите максимально возможное значение $N(\sigma)$ по всем $\sigma \in S_{70}$.

6. На координатной плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами. Известно, что внутри любого круга радиуса 2018 хотя бы одна точка отмечена. Докажите, что существует окружность, проходящая хотя бы через четыре отмеченные точки.

Решётки

1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
(a) Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
(b) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах большего квадрата, чем изначальный?

2. На координатной плоскости расположена фигура площади больше 1. Докажите, что в ней можно отметить две различные точки так, чтобы вектор, их соединяющий, имел целые координаты.

3. На плоскости расположено несколько квадратов со стороной 1, параллельных осям координат. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько гвоздей так, чтобы каждый квадрат был прибит ровно одним гвоздем.

4. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

5. Существует ли на клетчатой плоскости замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев одинаковой длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки?

6. Время жизни марсиан составляет в точности 100 лет. Каждый марсианин рождается ровно в момент начала какого-то года. За всё время жизни вселенной существовало нечетное число марсиан. Докажите, что можно выделить по крайней мере 100 годов (не обязательно подряд идущих), когда жило нечетное число марсиан.

7. На клетчатой плоскости дан многоугольник, вершины которого лежат в узлах целочисленной решетки. Каждую клетку плоскости разрезали красными диагоналями. В результате плоскость оказалась разбита на квадратики с красной границей, которые покрасили в шахматном порядке в черный и белый цвет. Докажите, что площадь белой части исходного многоугольника равна площади черной части. *Можно считать многоугольник выпуклым.*

8. Рассмотрим на плоскости множество точек с вещественными координатами (x, y) таких, что неравенство $mx+ny \geqslant \frac{1}{2}\cdot(m^2+n^2)$ имеет ровно 2018 целочисленных решений (m, n). Найдите площадь этого множества.

Задача №255

1. Пусть P — проекция вершины B треугольника ABC биссектрису угла C, I — центр вписанной окружности. Докажите утверждения:
(a) P лежит на средней линии, параллельной стороне AC;
(b) P лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB, AC;
(c) P лежит на прямой, соединяющей точки касания вневписанной в треугольник окружности со стороной AB и продолжением стороны AC.

2. Пусть P и Q — проекции вершин A и C неравнобедренного треугольника ABC на биссектрисы углов при вершинах C, A соответственно. А еще A_1 — середина стороны BC, C_1 — середина стороны AB. Докажите, что прямые PC_1 и QA_1 пересекаются на стороне AC.

3. Вневписанная окружность касается продолжений сторон BA и BC в точках N и M. Биссектриса угла смежного с $\angle A$ пересекает NM в точке K. Докажите, что $CK \perp AK$.

4. На плоскости выбран фиксированный угол с вершиной O и фиксирована точка A на одной его стороне ($A \neq O$). Пусть B — произвольная точка на другой стороне угла ($B \neq O$), а P и Q — точки касания вписанной в треугольник AOB окружности со сторонами соответственно OB и AB. Докажите, что все такие прямые PQ проходят через одну точку.

5. На стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB \perp BC$) нашлась такая точка X что $\angle AXD = \angle BXC$. Пусть Y — проекция точки X на прямую CD. Докажите, что описанная окружность треугольника ABY проходит через середину CD.

6. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

7. В треугольнике ABC ($AB > AC$) проведены биссектриса AL и медиана AM. Прямая, проведенная через M параллельно стороне AB, пересекает AL в точке D. Прямая, проведенная через L параллельно стороне AC, пересекает AM в точке E. Докажите, что $ED \perp AD$.

8. Вневписанная в треугольник ABC окружность с центром I_A (соответствующая вершине A) касается его сторон/продолжений сторон в точках A_1, B_1, C_1. Пусть P и Q — точки пересечения пар прямых A_1C_1 и CI_A, A_1B_1 и BI_A. AP и AQ пересекают BC в точках M, N. Докажите, что точка A_1 — середина MN.

Задача №255. Добавка

1. К двум окружностям проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров этих окружностей.

2. Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно, другая касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно.
(a) Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и A_2C_2 — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через вершину A.
(b) Прямые A_1B_1 и A_2C_2 пересекаются в точке X, а прямые A_1C_1 и A_2B_2 — в точке Y. Докажите, что прямая XY проходит через вершину A.
(c) Докажите, что отрезок AY равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность имеет центр I, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно; X — проекция A_1 на B_1C_1. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков A_1X и B_1C_1, проходит через ортоцентр треугольника BIC.

4. Пусть K — проекция вершины B на внешнюю биссектрису угла C остроугольного треугольника ABC. Пусть N — середина высоты BH треугольника, а M — середина меньшей дуги BC его описанной окружности. Докажите, что прямые IN и KM пересекаются на стороне BC, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Две точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, а прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
(b) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?
(c) Во что переходят точки описанной окружности при изогональном сопряжении?
(d) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q, изогонально сопряженной точки P.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

4. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 – точка, симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

5. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Касательные к описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке P. Точка Q — отражение основания высоты из вершины A относительно середины стороны BC. Перпендикуляр к прямой PQ, восстановленный в точке Q, пересекает прямые AB и AC в точках B' и C' соответственно. Докажите, что $\angle B'PB = \angle C'PC$.

Симедиана и гармонический четырехугольник

Определение. Рассмотрим треугольник ABC, его медиану BM и биссектрису BL. Тогда прямая, симметричная BM относительно BL, называется *симедианой* треугольника. Три симедианы пересекаются в *точке Лемуана*.

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P. Докажите, что прямая BP содержит симедиану BS.

2. Точка S — основание симедианы BS треугольника ABC. Докажите соотношение $AS : CS = AB^2 : BC^2$.

3. Свойства *гармонического четырехугольника.*
Следующие свойства вписанного четырехугольника $ABCD$ эквивалентны:

- $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.
- Касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC.
- Прямая AC — симедиана треугольника ABD.
- $\angle AMB = \angle DCB$, где M — середина диагонали AC.
- $\angle AMB = \angle AMD$, где M — середина диагонали AC.

Докажите, что какие-то
(a) 3; **(b)** 4; **(c)** 5
утверждений равносильны.

4. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр из точки C к прямой A_1B_1 проходит через середину PQ.

6. Биссектриса угла ABC пересекает AC и окружность ω_1, описанную около треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Окружность ω_2, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω_1 в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

7. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.

Теорема Паскаля

Теорема Паскаля. Даны шесть точек A, B, C, D, E, F на одной окружности. Тогда пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.

1. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y и CE с DF в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.[1]

2. Окружность, проходящая через вершины A и D основания трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q, а диагонали — в точках E, F. Докажите, что прямые BC, PQ, EF пересекаются в одной точке.

3. *Теорема Паскаля для четырехугольника.* Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения пар противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, совпадает с прямой, соединяющей точки пересечения пар касательных к этой окружности, восставленных в противоположных вершинах.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. Прямые AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, полученного пересечением треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в точке P.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90°$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO.

6. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O. Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X. Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

7. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC выбрали соответственно точки M и N так, что отрезок MN проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC. Пусть P и Q — середины отрезков CM и BN. Докажите, что $\angle POQ = \angle BAC$.

8. Треугольники ABC и $A'B'C'$ вписаны в одну и ту же окружность, и их пересечением является шестиугольник. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

[1] Попробуйте найти на картинке два подобных треугольника с изогонально сопряженными точками.

Разнобой-повторение (геометрия)

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

2. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL.

3. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

4. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

6. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

7. В треугольнике ABC отметили точки A', B' касания сторон BC, AC со вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB'. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

Разнобой-повторение (геометрия). Добавка

1. Даны окружность, ее хорда AB и точка W — середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

2. Дан треугольник ABC и точка F такая, что $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Прямая, проходящая через F и перпендикулярная BC, пересекает медиану, проведенную из вершины A, в точке A_1. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 являются тремя вершинами правильного шестиугольника, три другие вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке P. Прямая BP повторно пересекает описанную окружность в точке D. Прямая, проходящая через точку D и основание высоты треугольника из вершины B, повторно пересекает описанную окружность в точке K. Докажите, что точка K, середина стороны AC и ортоцентр лежат на одной прямой.

4. Окружность ω пересекает сторону BC треугольника ABC в точках A_1, A_2, сторону AC в точках B_1, B_2, сторону AB в точках C_1, C_2, причем порядок точек $B-C_1-C_2-A$, $A-B_1-B_2-C$, $C-A_1-A_2-B$. Прямые A_1C_1 и A_2B_2 пересекаются в точке A_3, B_1A_1 и B_2C_2 пересекаются в точке B_3, C_1B_1 и C_AB_2 пересекаются в точке C_3. Докажите, что прямые AA_3, BB_3, CC_3 пересекаются в одной точке.

Глава 4

Октаэдры (9-2)

Метод Штурма

1. Неравенства между средними (слева на право: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\,.$$

(a) Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

(b) Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным.

(c) Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим.

2. *Неравенство Гюйгенса.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, t — их среднее геометрическое. Докажите неравенство:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+t)^n\,.$$

3. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant (n-1)^n\,.$$

4. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2\cdot n!\,.$$

5. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)} \geqslant \frac{1}{3}\,.$$

6. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2}\,.$$

Максимум на конце отрезка

0. Пусть a — положительное число. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{k=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_{k-1})a_k(a-a_{k+1})\dots(a-a_n),$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат отрезку $[0; a]$.

1. Пусть $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$. Докажите, что

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d \geqslant 1\,.$$

2. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит $1/2$.

3. Пусть $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

4. Пусть действительные числа x, y, z лежат на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что

$$3(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)-2xyz(x+y+z) \leqslant 3\,.$$

5. Докажите, что для любых чисел a, b, c из отрезка $[0; 1]$ выполнено неравенство:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1\,.$$

6. Докажите, что если $1 \leqslant x_k \leqslant 2$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2 \leqslant n^3\,.$$

7. Дан связный граф G, в вершинах которого расставили неотрицательные числа с суммой 1, после чего для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах и сложили полученные числа для всех ребер. Выразите максимальное возможное значение рассмотренной суммы через размер максимальной клики в графе.

Кликой неориентированного графа называется подмножество его вершин, любые две из которых соединены ребром.

Комбинаторная теория чисел

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если l — нечетное число, не делящееся на 5.

3. Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

4. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

5. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, $\times$, $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

6. Назовем число *хорошим,* если его простые делители принадлежат множеству $\{2, 3, 5\}$. Записали 81 хорошее число. Докажите, что из них можно выбрать четыре числа, произведение которых точная четвертая степень.

7. Дано натуральное число k. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка является суверенным государством, а на каждом ребре стоит таможня, взимающая натуральное число талеров в качестве взятки за ее пересечение (в обоих направлениях — одинаковое, но, возможно, различное для разных границ). Докажите, что существует такой замкнутый маршрут, не заходящий ни в какую клетку дважды, что суммарная взятка на нем кратна k.

Конечные множества. Отображение конечных множеств

1. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные m элементов не стоят рядом?

2. Докажите, что при любом натуральном n число C_{2n}^{n} делится на $n+1$.

3. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m имеют общий делитель, отличный от 1.

4. Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

5. Найдите сумму $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \ldots + n^2C_n^n$.

6. Докажите тождество $\sum \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = k^n$, где суммирование производится по всем упорядоченным разбиениям числа n на k слагаемых.

7. В множестве A зафиксирован набор подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Разрешается брать пересечения и объединения имеющихся множеств, а также их дополнения до множества A. Сколько различных подмножеств множества A можно получить таким способом?

8. Докажите, что число $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(n+m)!}$ — целое.

9. Для любой упорядоченной пары подмножеств A, B (не обязательно различных) n-элементного множества подсчитано число элементов в пересечении $A \cap B$, а затем все эти числа просуммированы. Чему равна полученная сумма?

Числа Стирлинга и числа Белла

Обсуждение

- Сколькими способами можно разбить 4-элементное множество на два подмножества?
- Сколькими способами можно разбить 7-элементное множество на 4 подмножества?

Число Стирлинга S_n^k равно количеству способов, которыми можно разбить n-элементное множество на k подмножеств.

Упражнения

1. Найдите $\mathrm{S}_n^1, \mathrm{S}_n^2, \mathrm{S}_n^n$.
2. Найдите S_5^3.

Подсказка. Пусть четыре элемента вы уже расположили. Как можно подложить к ним пятый?

Рекуррентное соотношение: $\mathrm{S}_n^k = \mathrm{S}_{n-1}^{k-1} + k\mathrm{S}_{n-1}^k$.

3. Постройте несколько первых строк треугольника Стирлинга.

Обсуждение

- Сколькими способами можно разбить 4-элементное множество на непересекающиеся подмножества?
- Сколькими способами можно разбить 7-элементное множество на непересекающиеся подмножества?

Число Белла B_n равно количеству способов, которыми можно разбить n-элементное множество на непересекающиеся подмножества (возможно одно):

$$\mathrm{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}_n^i\,.$$

Последовательность Белла: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21 147, 115 975, ...

Задачи

1. Найдите число всех сюрьективных отображений n-элементного множества на k-элементное. Попытайтесь из этих соображений получить явную (пусть и очень нудную) формулу для чисел Стирлинга.

2. Обозначим следующий многочлен $[x]_k = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$. Докажите равенство

$$x^n = \sum_k \alpha(n,k)[x]_k$$

и найдите коэффициенты $\alpha(n,k)$.

3. Могут ли три последовательных числа Белла быть нечетными?

4. Найдите количество отображений из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в это же множество, при которых элемент 1 имеет n_1 прообразов, элемент 2 имеет n_2 прообразов, ..., элемент k имеет n_k прообразов (а остальные элементы прообразов не имеют).

5. Назовем *лестницей высоты n* фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

Ориентированные графы

Ориентированный граф — конечное множество вершин, некоторые из которых соединены стрелками. В ориентированном графе запрещены кратные стрелки (даже в разных направлениях) и петли, если не оговорено иное. Ориентированный граф *полный*, если любая пара его вершин соединена единственной стрелкой. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно добраться до любой другой по стрелкам.

1. Обозначим через A_1, A_2, ..., A_k компоненты сильной связности ориентированного графа G. Введем вспомогательный ориентированный граф H с вершинами a_1, a_2, ..., a_k; проведем стрелку из a_i в a_j в графе H, если существует хотя бы одна стрелка из A_i в A_j в графе G.
(a) Докажите, что в графе H нет циклов и кратных стрелок.
(b) Докажите, что если G был полным ориентированным графом, то вершины графа H можно пронумеровать так, чтобы все стрелки в графе H вели из вершины с меньшим номером в вершину с бо́льшим.
Граф H называется *конденсацией* ориентированного графа G.

2. Любые два города Табулистана соединены дорогой с односторонним движением. В стране транспортные проблемы: нет сильной связности. Докажите, что можно раздать все города республиканцам и демократам так, чтобы обе партии получили хотя бы по одному городу и чтобы никакая дорога не вела из города республиканцев в город демократов.

3. В условиях предыдущей задачи, если городов хотя бы три, на каком наименьшем числе дорог президенту Табулистана надо изменить направление движения, чтобы решить транспортные проблемы and make Tabulistan great again?

4. Докажите, что в полном ориентированном сильно связном графе на $n \geqslant 3$ вершинах через каждую его вершину проходит
(a) простой цикл длины 3;
(b) простой цикл любой длины k, где $3 \leqslant k \leqslant n$.

5. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно добраться до любого другого, не выезжая за пределы республики.

6. Докажите, что в полном ориентированном графе на $n \geqslant 7$ вершинах всегда найдется вершина, инвертированием всех стрелок в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.

7. Докажите, что в полном ориентированном графе на n вершинах ($n \geqslant 4$) существует такой гамильтонов путь $v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_n$, что $v_1 \to v_n$, если
(a) n — четное; **(b)** n — нечетное.

Вариация

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2017. Найдите максимально возможное их произведение.

3. В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n+1$ человек: $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Обозначим через w_i число побед игрока p_i. Найдите максимум и минимум (в зависимости от n) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

4. По окружности расставлены несколько положительных чисел, не превосходящих единицы. Докажите, что окружность можно разбить на 2018 дуг так, чтобы суммы чисел на соседних дугах отличались не более чем на один. Если чисел на дуге нет, то сумма чисел на дуге считается равной нулю.

5. Председателю дачного кооператива необходимо распределить 49 квадратных участков (в виде квадрата 7×7) среди 49 дачников. Каждый дачник враждует не более чем с 6 другими. Докажите, что это можно сделать так, чтобы никакие два враждующих дачника не получили соседние по стороне участки.

6. В таблице $n \times m$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.

7. *Хромой ладьей* назовем ладью, которая за один ход может сдвинуться только на одну клетку. Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число ее ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.

Сколь угодно много и бесконечно много

1. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

2. Зафиксировано натуральное число n. Будем говорить, что числовая строка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *лексикографически больше* числовой строки $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если есть такой $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i > y_i$.
Лемма. Докажите, что не существует бесконечной лексикографически убывающей последовательности строк длины n, состоящих из натуральных чисел.

3. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдется бесконечный простой путь.

4. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются *словами*. Некоторые конечные слова объявлены *матерными*. Слово называется *цензурным*, если оно не содержит матерных подслов.
(a) Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.
(b) Известно, что матерных слов конечное число и существует бесконечное цензурное слово. Докажите, что существует бесконечное периодическое цензурное слово.
(c) Останется ли верным утверждение предыдущего пункта, если снять ограничение на конечность множества матерных слов?

5. Сборная Табулистана с 2000 года ежегодно участвует в финале всероссийской олимпиады школьников по математике, которая проводится по параллелям 9, 10, 11 класса. Год n называется *провальным*, если для каждого предыдущего года m существует параллель, по которой в год n сборная Табулистана взяла меньше дипломов, чем в год m. Могут ли все годы участия, начиная с 2001, быть провальными?

6. Натуральные числа покрашены в несколько цветов. Докажите, что найдутся цвет X и число m такие, что для любого натурального k существуют натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ цвета X, где $a_{i+1} - a_i < m$ при всех $1 \leqslant i < k$.

7. Мудрецы выстроены в бесконечный ряд. На каждом — колпак одного из двух цветов. Каждый мудрец знает свой номер в ряду и видит всех мудрецов с большими номерами. Мудрецы по команде должны одновременно назвать предполагаемый цвет своего колпака. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о стратегии так, чтобы при любой расстановке колпаков не угадало цвет своего колпака лишь конечное число мудрецов.

Тройки Штейнера и другие системы подмножеств

Обсуждение

Антицепь из подмножеств — это набор подмножеств, никакие два из которых друг в друга не вложены.

Теорема Шпернера об антицепях. Самая большая антицепь в n-элементном множестве содержит $C_n^{[n/2]}$ подмножеств.

1. Сколько полных цепей существует в n-элементном множестве?

2. Подмножество A множества X содержит k элементов. Сколько существует полных цепей, содержащих подмножество A?

3. В n-элементном множестве выделили несколько подмножеств, содержащих x_1, x_2, ..., x_k элементов соответственно. Известно, что ни одно из этих множеств не содержится в другом. Докажите неравенство
$$\frac{1}{C_n^{x_1}} + \frac{1}{C_n^{x_2}} + \ldots + \frac{1}{C_n^{x_n}} \leqslant 1\,.$$

4. Докажите теорему Шпернера.

Задачи

1. Комиссия состоит из 100 человек. На каждое заседание приходит три члена комиссии. Может ли через некоторое время получиться так, что любые два члена комиссии встретятся на заседаниях ровно один раз? Тот же вопрос, если в комиссии 101 человек.

Определение. Пусть дано некоторое конечное множество. *Системой троек Штейнера* этого множества называется такой набор его трехэлементных подмножеств, что любая пара элементов этого множества встречается ровно в одном подмножестве.

2. Пусть для некоторого n-элементного множества удалось построить систему троек Штейнера. Анализируя решения задачи 1, установите необходимое условие на число n.

3. Построить систему троек Штейнера для 7-элементного множества, 21-элементного множества, 49-элементного множества.

4. Известно, что система троек Штейнера существует для m-элементного и для n-элементного множества. Доказать, что она существует и для множества, содержащего mn элементов.

5. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

6. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

7. Множество A содержит 101 число, не превосходящее миллиона. Сдвигом множества A называется множество чисел, каждое из которых получается прибавлением ко всем его элементам некоторого фиксированного числа, также не превосходящего миллиона. Докажите, что найдется сто попарно не пересекающихся сдвига множества A.

Решётки

1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
(a) Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
(b) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах большего квадрата, чем изначальный?

2. На координатной плоскости расположена фигура площади больше 1. Докажите, что в ней можно отметить две различные точки так, чтобы вектор, их соединяющий, имел целые координаты.

3. На плоскости расположено несколько квадратов со стороной 1, параллельных осям координат. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько гвоздей так, чтобы каждый квадрат был прибит ровно одним гвоздем.

4. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

5. Существует ли на клетчатой плоскости замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев одинаковой длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки?

6. Время жизни марсиан составляет в точности 100 лет. Каждый марсианин рождается ровно в момент начала какого-то года. За всё время жизни вселенной существовало нечетное число марсиан. Докажите, что можно выделить по крайней мере 100 годов (не обязательно подряд идущих), когда жило нечетное число марсиан.

7. На клетчатой плоскости дан многоугольник, вершины которого лежат в узлах целочисленной решетки. Каждую клетку плоскости разрезали красными диагоналями. В результате плоскость оказалась разбита на квадратики с красной границей, которые покрасили в шахматном порядке в черный и белый цвет. Докажите, что площадь белой части исходного многоугольника равна площади черной части. *Можно считать многоугольник выпуклым.*

8. Рассмотрим на плоскости множество точек с вещественными координатами (x, y) таких, что неравенство $mx+ny \geqslant \frac{1}{2}\cdot(m^2+n^2)$ имеет ровно 2018 целочисленных решений (m, n). Найдите площадь этого множества.

Дополнительные задачи по комбинаторике

1. Последовательность a_n натуральных чисел называется *полиномиальной,* если существует многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $a_n = P(n)$ при всех натуральных n. Можно ли раскрасить натуральные числа в два цвета так, чтобы не было одноцветных полиномиальных последовательностей?

2. Рассмотрим перестановку $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{70})$ чисел $1, 2, \ldots, 70$. За один ход разрешается поменять два числа местами. Нашей целью является получить набор $(1, 2, \ldots, 70)$ из σ. Обозначим через $N(\sigma)$ минимальное число ходов, которые приводят к цели из перестановки σ. Найдите максимально возможное значение $N(\sigma)$ по всем $\sigma \in S_{70}$.

3. Стрелки полного ориентированного графа раскрашены в два цвета. Докажите, что в нем существует вершина, от которой можно добраться до любой другой вершины по некоторому монохромному пути одного из двух цветов.

Задача №255

1. Пусть P — проекция вершины B треугольника ABC биссектрису угла C, I — центр вписанной окружности. Докажите утверждения:

(a) P лежит на биссектрисе угла C треугольника ABC;

(b) P лежит на средней линии, параллельной стороне AC;

(c) P лежит на окружности, построенной на BI как на диаметре;

(d) P лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB, AC;

(e) P лежит на прямой, соединяющей точки касания вневписанной в треугольник окружности со стороной AB и продолжением стороны AC.

2. В треугольнике ABC опущены перпендикуляры BM и BN на биссектрисы углов A и C, а также перпендикуляры BP и BQ на внешние биссектрисы этих же углов. Докажите, что:

(a) точки M, N, P и Q лежат на одной прямой;

(b) длина отрезка PQ равна полупериметру треугольника ABC.

3. Пусть P и Q — проекции вершин A и C неравнобедренного треугольника ABC на биссектрисы углов при вершинах C, A соответственно. А еще A_1 — середина стороны BC, C_1 — середина стороны AB. Докажите, что прямые PC_1 и QA_1 пересекаются на стороне AC.

4. Вневписанная окружность касается продолжений сторон BA и BC в точках N и M. Биссектриса угла смежного с $\angle A$ пересекает NM в точке K. Докажите, что $CK \perp AK$.

5. На плоскости выбран фиксированный угол с вершиной O и фиксирована точка A на одной его стороне ($A \neq O$). Пусть B — произвольная точка на другой стороне угла ($B \neq O$), а P и Q — точки касания вписанной в треугольник AOB окружности со сторонами соответственно OB и AB. Докажите, что все такие прямые PQ проходят через одну точку.

6. На стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB \perp BC$) нашлась такая точка X что $\angle AXD = \angle BXC$. Пусть Y — проекция точки X на прямую CD. Докажите, что описанная окружность треугольника ABY проходит через середину CD.

7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Задача №255. Добавка

1. К двум окружностям проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров этих окружностей.

2. Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно, другая касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно.
(a) Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и A_2C_2 — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через вершину A.
(b) Прямые A_1B_1 и A_2C_2 пересекаются в точке X, а прямые A_1C_1 и A_2B_2 — в точке Y. Докажите, что прямая XY проходит через вершину A.
(c) Докажите, что отрезок AY равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL — ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC.

4. В треугольнике ABC ($AB > AC$) проведены биссектриса AL и медиана AM. Прямая, проведенная через M параллельно стороне AB, пересекает AL в точке D. Прямая, проведенная через L параллельно стороне AC, пересекает AM в точке E. Докажите, что $ED \perp AD$.

5. Вневписанная в треугольник ABC окружность с центром I_A (соответствующая вершине A) касается его сторон/продолжений сторон в точках A_1, B_1, C_1. Пусть P и Q — точки пересечения пар прямых A_1C_1 и CI_A, A_1B_1 и BI_A. AP и AQ пересекают BC в точках M, N. Докажите, что точка A_1 — середина MN.

6. Вписанная в треугольник ABC окружность имеет центр I, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно; X — проекция A_1 на B_1C_1. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков A_1X и B_1C_1, проходит через ортоцентр треугольника BIC.

Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Две точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, а прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
(b) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?
(c) Во что переходят точки описанной окружности при изогональном сопряжении?
(d) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q, изогонально сопряженной точки P.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

4. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 – точка, симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

5. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Касательные к описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке P. Точка Q — отражение основания высоты из вершины A относительно середины стороны BC. Перпендикуляр к прямой PQ, восстановленный в точке Q, пересекает прямые AB и AC в точках B' и C' соответственно. Докажите, что $\angle B'PB = \angle C'PC$.

Симедиана и гармонический четырехугольник

Определение. Рассмотрим треугольник ABC, его медиану BM и биссектрису BL. Тогда прямая, симметричная BM относительно BL, называется *симедианой* треугольника. Три симедианы пересекаются в *точке Лемуана*.

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P. Докажите, что прямая BP содержит симедиану BS.

2. Точка S — основание симедианы BS треугольника ABC. Докажите соотношение $AS : CS = AB^2 : BC^2$.

3. Свойства *гармонического четырехугольника.*
Следующие свойства вписанного четырехугольника $ABCD$ эквивалентны:

- $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.
- Касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC.
- Прямая AC — симедиана треугольника ABD.
- $\angle AMB = \angle DCB$, где M — середина диагонали AC.
- $\angle AMB = \angle AMD$, где M — середина диагонали AC.

Докажите, что какие-то
(a) 3; **(b)** 4; **(c)** 5
утверждений равносильны.

4. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр из точки C к прямой A_1B_1 проходит через середину PQ.

6. Биссектриса угла ABC пересекает AC и окружность ω_1, описанную около треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Окружность ω_2, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω_1 в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

7. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.

Теорема Паскаля

Теорема Паскаля. Даны шесть точек A, B, C, D, E, F на одной окружности. Тогда пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.

1. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y и CE с DF в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.[1]

2. Окружность, проходящая через вершины A и D основания трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q, а диагонали — в точках E, F. Докажите, что прямые BC, PQ, EF пересекаются в одной точке.

3. *Теорема Паскаля для четырехугольника.* Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения пар противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, совпадает с прямой, соединяющей точки пересечения пар касательных к этой окружности, восставленных в противоположных вершинах.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. Прямые AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, полученного пересечением треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в точке P.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90°$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO.

6. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O. Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X. Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

7. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC выбрали соответственно точки M и N так, что отрезок MN проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC. Пусть P и Q — середины отрезков CM и BN. Докажите, что $\angle POQ = \angle BAC$.

[1] Попробуйте найти на картинке два подобных треугольника с изогонально сопряженными точками.

Разнобой-повторение (геометрия)

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

2. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

3. Даны окружность, ее хорда AB и точка W — середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

4. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL.

5. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

6. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

Глава 5

Гексаэдры (9-3)

Метод Штурма

1. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant \frac{ab+bc+ac}{3}.$$

2. Неравенства между средними (слева на право: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

(a) Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным.

(b) Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим.

3. *Неравенство Гюйгенса.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, t — их среднее геометрическое. Докажите неравенство:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant (1+t)^n.$$

4. Докажите неравенство для положительных значений переменных:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

5. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

6. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2\cdot n!.$$

7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Максимум на конце отрезка

0. Пусть a — положительное число. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{k=1}^{n}(a-a_1)(a-a_2)\dots(a-a_{k-1})a_k(a-a_{k+1})\dots(a-a_n),$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат отрезку $[0; a]$.

1. Пусть $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$. Докажите, что

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d \geqslant 1.$$

2. Пусть $n \geqslant 2$ и $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Докажите, что

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

3. Найдите максимальное значение суммы

$$S_n = a_1(1-a_2)+a_2(1-a_3)+\dots+a_n(1-a_1),$$

где $\frac{1}{2} \leqslant a_i \leqslant 1$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Докажите, что площадь треугольника, лежащего внутри единичного квадрата, не превосходит $1/2$.

5. Пусть действительные числа x, y, z лежат на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что

$$3(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)-2xyz(x+y+z) \leqslant 3.$$

6. Дано дерево G, в вершинах которого расставили неотрицательные числа с суммой 1, после чего для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах и сложили полученные числа для всех ребер. Найдите максимум рассмотренной суммы.

7. Докажите, что для любых чисел a, b, c из отрезка $[0; 1]$ выполнено неравенство:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

Комбинаторная теория чисел

1. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если
   (a) $l = 9$;
   (b) l — нечетное число, не делящееся на 5.

2. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

3. На доске написаны 10 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых четырех из них кратно 1001. Докажите, что хотя бы одно из написанных чисел само по себе кратно 1001.

4. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, $\times$, $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.

5. Даны 57 натуральных чисел, не превосходящих 2018. Известно, что среди любых трех данных чисел найдутся два, произведение которых — точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

Ориентированные графы

Ориентированный граф — конечное множество вершин, некоторые из которых соединены стрелками. В ориентированном графе запрещены кратные стрелки (даже в разных направлениях) и петли, если не оговорено иное. Ориентированный граф *полный,* если любая пара его вершин соединена единственной стрелкой. Ориентированный граф называется *сильно связным,* если из любой его вершины можно добраться до любой другой по стрелкам.

1. Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует путь, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу *(гамильтонов путь).*

2. Обозначим через A_1, A_2, ..., A_k компоненты сильной связности ориентированного графа G. Введем вспомогательный ориентированный граф H с вершинами a_1, a_2, ..., a_k; проведем стрелку из a_i в a_j в графе H, если существует хотя бы одна стрелка из A_i в A_j в графе G.

(a) Докажите, что в графе H нет кратных стрелок (т. е. что между любыми двумя компонентами графа G ребра идут только в одном направлении).

(b) Докажите, что в графе H нет циклов.

(c) Докажите, что если G был полным ориентированным графом, то вершины графа H можно пронумеровать так, чтобы все стрелки в графе H вели из вершины с меньшим номером в вершину с бо́льшим.

Граф H называется *конденсацией* ориентированного графа G.

3. Про ориентированный граф известно, что в нем не существует маршрута, проходящего по всем вершинами (даже если в некоторые вершины заходить по нескольку раз). Докажите, что вершины графа можно раскрасить в красный и синий цвет так, чтобы оба цвета присутствовали и чтобы никакая стрелка не вела из красной вершины в синюю.

4. Даны n точек, двое играют в игру. За один ход игрок может соединить стрелкой две точки, не соединенные ранее. Запрещено оставлять после своего хода сильно связный граф. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Изначально никаких стрелок не было. Кто выигрывает: начинающий или его соперник?

5. Докажите, что в любом сильно связном полном ориентированном графе на $n \geqslant 3$ вершинах существует цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу *(гамильтонов цикл).*

6. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно добраться до любого другого, не выезжая за пределы республики.

Ориентированные графы. Дополнительные задачи

7. Докажите, что в полном ориентированном сильно связном графе на $n \geqslant 3$ вершинах через каждую его вершину проходит

(a) простой цикл длины 3;

(b) простой цикл любой длины k, где $3 \leqslant k \leqslant n$.

8. Докажите, что в полном ориентированном графе на $n \geqslant 7$ вершинах всегда найдется вершина, инвертированием всех стрелок в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.

Конечные множества. Отображение конечных множеств

1. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные m элементов не стоят рядом?

2. Пусть A, B, C — количество подмножеств n-элементного множества, в которых количеств элементов имеет вид $3k$, $3k+1$, $3k+2$ соответственно. Могут ли все эти три числа быть одинаковыми? Все три разными?

3. Найдите сумму $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n\mathrm{C}_n^n$.

4. Найдите сумму $\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + 3^2\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n^2\mathrm{C}_n^n$.

5. Докажите, что при любом натуральном n число C_{2n}^n делится на $n+1$.

6. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m имеют общий делитель, отличный от 1.

7. Найдите количество отображений из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в это же множество, при которых элемент 1 имеет n_1 прообразов, элемент 2 имеет n_2 прообразов, ..., элемент k имеет n_k прообразов (а остальные элементы прообразов не имеют).

8. Докажите тождество $\sum \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = k^n$, где суммирование производится по всем упорядоченным разбиениям числа n на k слагаемых.

9. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Формула включений-исключений

Через $|A|$ обозначается число элементов конечного множества A. Для произвольного набора конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ справедлива формула

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots$$
$$\dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|\,.$$

1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «тартар» так, чтобы нашлись две одинаковые буквы, стоящие рядом?

2. Сколько существует различных натуральных чисел, меньших миллиона, в запись которых входит каждая из цифр 1, 2, 3, 4?

3. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу *трудной,* если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

4. **(a)** По пустыне идет караван из 8 верблюдов. Найти число способов, которыми можно переставить верблюдов так, чтобы ни один из верблюдов не стоял на старом месте?
(b) Обозначим через D_n число перестановок на множестве чисел от 1 до n, в которых ни одно из чисел не совпадает со своим номером. Найдите формулы для величин D_n. Числа D_n называются *субфакториалами.*

5. *Задача о счастливых билетах.* Автобусный билет представляет собой произвольный набор шести цифр. Билет называется *счастливым,* если сумма первых трех его цифр равна сумме трех последних.
(a) Доказать, что число счастливых билетов равно числу билетов с суммой цифр 27.
(b) Сколько счастливых билетов существует?

6. **(a)** По пустыне идет караван из 8 верблюдов. Найти число способов, которыми можно переставить верблюдов так, чтобы ни один из верблюдов не шел непосредственно за тем верблюдом, за которым шел раньше.
(b) Обозначим через E_n — число перестановок, в которых никакие два последовательных числа (большее за меньшим) не идут друг за другом. Найти формулы для величины E_n.

7. На кафтане площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше 1/2. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/5.

8. Пусть m и n — натуральные числа, $m < n$. Найдите сумму

$$\mathrm{C}_n^1(n-1)^m - \mathrm{C}_n^2(n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1}\,.$$

Вариация

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2017. Найдите максимально возможное их произведение.

3. В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n+1$ человек: $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Обозначим через w_i число побед игрока p_i. Найдите
(a) минимум; **(b)** максимум
(в зависимости от n) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

4. По окружности расставлены несколько положительных чисел, не превосходящих единицы. Докажите, что окружность можно разбить на 2018 дуг так, чтобы суммы чисел на соседних дугах отличались не более чем на один. Если чисел на дуге нет, то сумма чисел на дуге считается равной нулю.

5. Председателю дачного кооператива необходимо распределить 49 квадратных участков (в виде квадрата 7×7) среди 49 дачников. Каждый дачник враждует не более чем с 5 другими. Докажите, что это можно сделать так, чтобы никакие два враждующих дачника не получили соседние по стороне участки.

6. В таблице $n \times m$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.

Сколь угодно много и бесконечно много

1. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

2. Зафиксировано натуральное число n. Будем говорить, что числовая строка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *лексикографически больше* числовой строки $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, если есть такой $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i > y_i$.
Лемма. Докажите, что не существует бесконечной лексикографически убывающей последовательности строк длины n, состоящих из натуральных чисел.

3. В Табулистане все купюры местной валюты обладают целочисленными номиналом. В местном банке готовы принять любую купюру и выдать вместо нее любое количество купюр меньшего номинала. У барона Мюнхгаузена есть купюра достоинством 100, и он утверждает, что сможет жить на эти деньги бесконечно долго, расходуя при этом не менее 1 единицы валюты в день. Стоит ли ему доверять?

4. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдется бесконечный простой путь.

5. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются *словами*. Некоторые конечные слова объявлены *матерными.* Слово называется *цензурным,* если оно не содержит матерных подслов.
(a) Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.
(b) Известно, что матерных слов конечное число и существует бесконечное цензурное слово. Докажите, что существует бесконечное периодическое цензурное слово.

6. Допустим, что любую конечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда и бесконечную карту тоже можно раскрасить в 4 цвета.

7. Вася закрашивает точки координатной плоскости с натуральными координатами. За одну операцию он выбирает ещё не закрашенную точку (m, n) и закрашивает все точки (x, y), у которых $x \geqslant m$ и $y \geqslant n$. Может ли Вася проворачивать свои операции бесконечно долго?

8. Сборная Табулистана с 2000 года ежегодно участвует в финале всероссийской олимпиады школьников по математике, которая проводится по параллелям 9, 10, 11 класса. Год n называется *провальным,* если для каждого предыдущего года m существует параллель, по которой в год n сборная Табулистана взяла меньше дипломов, чем в год m. Могут ли все годы участия, начиная с 2001, быть провальными?

Решётки

1. В вершинах некоторого квадрата сидит по одному кузнечику. Каждую минуту ровно один кузнечик перепрыгивает центрально-симметрично через какого-то другого.
   (a) Докажите, что если кузнечики вновь оказались в вершинах изначального квадрата, то каждый вернулся именно на свою стартовую позицию.
   (b) Могут ли кузнечики когда-нибудь оказаться в вершинах большего квадрата, чем изначальный?

2. На координатной плоскости расположена фигура площади больше 1. Докажите, что в ней можно отметить две различные точки так, чтобы вектор, их соединяющий, имел целые координаты.

3. На плоскости расположено несколько квадратов со стороной 1, параллельных осям координат. Докажите, что в плоскость можно вбить несколько гвоздей так, чтобы каждый квадрат был прибит ровно одним гвоздем.

4. На плоскости расположено 2015 квадратов со стороной 1, параллельных осям координат. Докажите, что множество точек плоскости, покрытых нечетным количеством таких квадратов, имеет площадь не менее 1.

5. Внутри правильного треугольника отмечена точка. Ее отразили несколько раз относительно сторон треугольника (в случайном порядке), и она опять попала внутрь треугольника. Докажите, что она вернулась на исходное место.

6. Время жизни марсиан составляет в точности 100 лет. Каждый марсианин рождается ровно в момент начала какого-то года. За всё время жизни вселенной существовало нечетное число марсиан. Докажите, что можно выделить по крайней мере 100 годов (не обязательно подряд идущих), когда жило нечетное число марсиан.

7. На клетчатой плоскости дан многоугольник, вершины которого лежат в узлах целочисленной решетки. Каждую клетку плоскости разрезали красными диагоналями. В результате плоскость оказалась разбита на квадратики с красной границей, которые покрасили в шахматном порядке в черный и белый цвет. Докажите, что площадь белой части исходного многоугольника равна площади черной части. *Можно считать многоугольник выпуклым.*

Задача №255

1. Пусть P — проекция вершины B треугольника ABC биссектрису угла C, I — центр вписанной окружности. Докажите утверждения:

(a) P лежит на биссектрисе угла C треугольника ABC;

(b) P лежит на средней линии, параллельной стороне AC;

(c) P лежит на окружности, построенной на BI как на диаметре;

(d) P лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB, AC;

(e) P лежит на прямой, соединяющей точки касания вневписанной в треугольник окружности со стороной AB и продолжением стороны AC.

2. В треугольнике ABC опущены перпендикуляры BM и BN на биссектрисы углов A и C, а также перпендикуляры BP и BQ на внешние биссектрисы этих же углов. Докажите, что:

(a) точки M, N, P и Q лежат на одной прямой;

(b) длина отрезка PQ равна полупериметру треугольника ABC.

3. Пусть P и Q — проекции вершин A и C неравнобедренного треугольника ABC на биссектрисы углов при вершинах C, A соответственно. А еще A_1 — середина стороны BC, C_1 — середина стороны AB. Докажите, что прямые PC_1 и QA_1 пересекаются на стороне AC.

4. Вневписанная окружность касается продолжений сторон BA и BC в точках N и M. Биссектриса угла смежного с $\angle A$ пересекает NM в точке K. Докажите, что $CK \perp AK$.

5. На плоскости выбран фиксированный угол с вершиной O и фиксирована точка A на одной его стороне ($A \neq O$). Пусть B — произвольная точка на другой стороне угла ($B \neq O$), а P и Q — точки касания вписанной в треугольник AOB окружности со сторонами соответственно OB и AB. Докажите, что все такие прямые PQ проходят через одну точку.

6. На стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AB \perp BC$) нашлась такая точка X что $\angle AXD = \angle BXC$. Пусть Y — проекция точки X на прямую CD. Докажите, что описанная окружность треугольника ABY проходит через середину CD.

7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Две точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, а прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.

(b) Какие точки изогонально сопряжены самим себе?

(c) Во что переходят точки описанной окружности при изогональном сопряжении?

(d) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Отразим точку P относительно сторон треугольника (или из продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через отраженные точки. Докажите, что точка Q, изогонально сопряженная точке P, является центром этой окружности.

3. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C, отличная от описанной, переходит в окружность, проходящую через B и C.

4. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

6. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 – точка, симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

7. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

Симедиана и гармонический четырехугольник

Определение. Рассмотрим треугольник ABC, его медиану BM и биссектрису BL. Тогда прямая, симметричная BM относительно BL, называется *симедианой* треугольника. Три симедианы пересекаются в *точке Лемуана*.

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P. Докажите, что прямая BP содержит симедиану BS.

2. Свойства *гармонического четырехугольника.*
Следующие свойства вписанного четырехугольника $ABCD$ эквивалентны:

- $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.
- Касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC.
- Прямая AC — симедиана треугольника ABD.
- $\angle AMB = \angle DCB$, где M — середина диагонали AC.
- $\angle AMB = \angle AMD$, где M — середина диагонали AC.

Докажите, что какие-то
(a) 3; **(b)** 4; **(c)** 5
утверждений равносильны.

3. Точка S — основание симедианы BS треугольника ABC. Докажите соотношение $AS : CS = AB^2 : BC^2$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках B и C. Касательные к ω_1, восстановленные в точках B и C, пересекаются в точке P. Пусть точка A лежит на окружности ω_1. Прямые AB и AC пересекают ω_2 в точках X и Y. Докажите, что прямая AP проходит через середину отрезка XY.

5. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

6. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр из точки C к прямой A_1B_1 проходит через середину PQ.

7. Биссектриса угла ABC пересекает AC и окружность ω_1, описанную около треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Окружность ω_2, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω_1 в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

Теорема Паскаля

Теорема Паскаля. Даны шесть точек A, B, C, D, E, F на одной окружности. Тогда пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.

1. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y и CE с DF в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.[1]

2. Окружность, проходящая через вершины A и D основания трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q, а диагонали — в точках E, F. Докажите, что прямые BC, PQ, EF пересекаются в одной точке.

3. *Теорема Паскаля для четырехугольника.* Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения пар противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника, совпадает с прямой, соединяющей точки пересечения пар касательных к этой окружности, восставленных в противоположных вершинах.

4. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. Прямые AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, полученного пересечением треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в точке P.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90°$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO.

6. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O. Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X. Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

7. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC выбрали соответственно точки M и N так, что отрезок MN проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC. Пусть P и Q — середины отрезков CM и BN. Докажите, что $\angle POQ = \angle BAC$.

8. Треугольники ABC и $A'B'C'$ вписаны в одну и ту же окружность, и их пересечением является шестиугольник. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

[1] Попробуйте найти на картинке два подобных треугольника ABY и EDY с изогонально сопряженными точками X и Z.

Разнобой-повторение (геометрия)

1. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

2. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

3. Даны окружность, ее хорда AB и точка W — середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

4. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL.

5. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

6. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

Глава 6

Анонсы спецкурсов

Семейства множеств

В курсе мы будем изучать различные вопросы такого вида: предположим, у нас есть набор конечных множеств, которые удовлетворяют каким-то дополнительным ограничениям (например, множества попарно не вложены или попарно пересекаются). Можем ли мы тогда сказать что-то про структуру и количество этих множеств? Я расскажу про несколько подходов к решению таких задач. Первые 2 лекции будут посвящены комбинаторным методам, главной теоремой для нас будет знаменитая теорема Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства. Потом мы увидим, как теория чисел и алгебра приходят на помощь, когда комбинаторика перестает работать.

Для понимания курса специальных знаний не нужно. Желательно иметь опыт работы «по модулю p». Для зачета нужно будет сдать несколько задач из листка.

Триангуляция Делоне

Триангуляцией назовем разбиение плоскости на треугольники таким образом, чтобы любые два треугольника либо не пересекались, либо имели общую сторону или вершину. Понятно, что триангуляций с заданным множеством вершин существует очень много. Мы познакомимся в некотором смысле с самой «хорошей»: триангуляцией Делоне, в которой описанная окружность каждого треугольника не содержит внутри других точек множества. Также мы узнаем много других свойств этого разбиения, и обсудим, как можно его строить.

Набор математических текстов в LaTeX

Практически все листочки с задачами, которые вам выдаются на этих сборах, подготовлены в различных вариациях системы LaTeX (произносится «ла́тех»). На занятиях вы научитесь набирать математические тексты в этой системе, а также рисовать чертежи к геометрическим задачам с помощью языка Asymptote.

Требования к слушателям:

- **компьютер в пользовании во время занятий спецкурса,** с современным браузером (Google Chrome, например);
- наличие собственного e-mail адреса;
- понимание того, как связаны пары чисел с точками на плоскости.

Можно заранее зарегистрироваться на сайте `overleaf.com`.

Курс будет состоять из TeXнической части, по итогам которой вы должны будете набрать решения нескольких задач; и геометрической части, по итогам которой вы должны будете нарисовать несколько чертежей в Asymptote.

Группы подстановок

Программа курса

Занятие 1. Повторение без доказательства: движения плоскости, теорема Шаля. Самосовмещения плоских фигур. Задание самосовмещения подстановкой на множестве вершин. Определение подстановки. Композиция подстановок. Типы подстановок (транспозиции и циклы).

Занятие 2. Четные и нечетные подстановки. Минимальные порождающие множества симметрической группы.
Некоторые движения трехмерного пространства. Самосовмещения правильного тетраэдра и куба.

Занятие 3. Конечные подгруппы группы движений. Централизатор подстановки. Орбита и стабилизатор элемента. Теорема об индексе стабилизатора.

Занятие 4. Лемма Бернсайда о среднем числе неподвижных точек и ее приложения в комбинаторике.

От неравенств и оценок до постулата Бертрана

Кто кого «перегонит» при больших n, если «соревнуются», к примеру, 2^n и n^{100}? Всегда ли найдется простое число между n и $2n$? Как неравенства и оценки помогают в задачах, где в условии нет никаких неравенств.

Сложность алгоритмов

Данный спецкурс посвящен теме эффективных алгоритмов и их сложности. Будут затронуты алгоритмы, связанные с задачами теории чисел, а также алгоритмы, решающие комбинаторные задачи. Спецкурс не требует специальной подготовки.

В первый день будут даны основы модульной арифметики, будет изложен метод нахождения обратного элемента по простому модулю на основе малой теоремы Ферма, а также алгоритм быстрого возведения в степень. На примере быстрого возведения в степень будет рассказано о понятии вычислительной сложности алгоритма. Будет рассмотрена задача нахождения n-го числа Фибоначчи, рассказано о проблемах связанных с использованием явной формулы и о методе, использующем матрицу перехода, который позволяет находить остаток от деления n-го числа Фибоначчи по заданному модулю для огромных значений n.

Во второй день будет изложен алгоритм, позволяющий эффективно находить все делители заданного целого числа, а также раскладывать это число на простые множители. Далее будет разобран алгоритм «Решето Эратосфена» и его модификации, а также способы, позволяющие дополнительно вычислять различные арифметические функции, например, функцию Эйлера, функцию Мебиуса, количество делителей числа, сумму делителей числа. Кратко будет рассказано об алгоритмах проверки числа на простоту.

В третий день речь пойдет о таком способе решения задач, как «Динамическое программирование». Будет рассказано о различных видах динамического программирования на примере классических задач по этой теме.

В четвертый день будет разобран класс задач на динамическое программирование по профилю. Затем будет проведен зачет по пройденным темам.

Многочлены в арифметике остатков

Рассмотрим многочлен вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,,$$

коэффициенты a_k и переменная x в котором — это вычеты по некоторому натуральному модулю m. Тогда его значение тоже будет определено по модулю m.

На спецкурсе мы вспомним некоторые утвержения теории многочленов для действительных чисел (решение квадратных уравнений, теорему Виета) и их доказательства; а потом поймем, как они переносятся на многочлены по натуральному модулю.

Чтобы решить квадратные уравнения, нам придется познакомится с понятиями квадратичного вычета и невычета, а также с квадратичным законом взаимности.

Никаких предварительных требований к слушателям нет. Зачет будет ставится по итогам сдачи задач.

Элементы теории вероятностей

Программа курса

Занятие 1. Определение вероятности. Пространство элементарных событий. Геометрические вероятности.

Занятие 2. Операции с событиями. Вероятность суммы событий, произведения событий и дополнительного события.

Занятия 3–4. Формула полной вероятности. Вероятностные стратегии. Вероятность и рекурсия.

Многочлены и кривые

Мы начнём с многочленов от одной переменной, а потом перейдём к многочленам от двух переменных и кривым на плоскости, которые задаются этими многочленами.

Мы дадим красивое доказательство теорем Паппа и Паскаля с помощью многочленов.

Среди вопросов, которые будут затрагиваться: можно ли задать на плоскости многочленом ветвь гиперболы, в скольких точках могут пересекаться две алгебраические кривые на плоскости и др.

Приглашаются 9-классники (надо знать уравнение окружности, параболы, прямой в декартовых координатах).

Фонология: преобразования звуков в языке

Формы русского слова «голова» звучат так: [галава́], [галавы́], [галав’е́], [го́лаву], [галаво́й], [галав’е́], [го́лавы], [гало́ф], [галава́м], [галава́м’и], [галава́х]. Корень этого слова может звучать четырьмя разными способами: [галав], [галав’], [го́лав], [гало́ф], — но ни в одном словаре вы не найдёте такого перечисления.

Дело в том, что мы склонны считать, что эти варианты получаются из единой формы «голов» с помощью простых преобразований: безударное «о» превращается в [а], а «в» переходит в [ф] в конце слова и смягчается перед «е». Но такие преобразования могут быть гораздо более сложными, и тогда надо понять, как они взаимодействуют друг с другом. Например, существует теория, которая представляет русское слово «переодевающаяся» как

per=o=dē+w+ō+ī+o+nt+j+ō-i+ō-sim,

а чтобы получить его реальное звучание, надо применить длинную цепочку упорядоченных правил. О том, как устроены такие правила и цепочки правил, которые управляют русским языком и другими языками мира, мы и поговорим на спецкурсе.

Задачи на пространственное воображение

(Анонс отсутствует в архиве.)

Бесконечные множества и аксиома выбора

Первая половина курса будет посвящена понятию мощности бесконечного множества. Мы выясним, почему точек на отрезке длины 1 больше, чем натуральных чисел, но при этом столько же, сколько точек на отрезке длины 2 и столько же, сколько точек внутри квадрата.

Во второй половине курса будут сформулированы аксиома выбора и лемма Цорна (которые, к слову, эквивалентны друг другу). Они позволят доказывать существование каких-либо объектов, не строя эти объекты явно. Мы обсудим разные следствия аксиомы выбора, некоторые из которых противоречат нашей интуиции. Например, мы докажем существование множества, не имеющего площади. Еще мы рассмотрим функции f, удовлетворяющие условию $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех действительных x, y. Понятно, что линейные функции $y = kx$ этому удовлетворяют. Но есть ли другие такие функции?...