$$\int\limits_{\text{3 декабря 2015}}^{\text{10 декабря 2015}} \begin{pmatrix} \text{Московские сборы} \\ \text{по математике} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

Немного о группах

Занятия проходили в двух группах:

8-2 «Зяблики» 8-1 «Снегири»

Группа 8-1 была собраны из предположительно более сильных школьников, и задачи там в среднем сложнее, чем в группе 8-2.

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- алгебра;
- теория чисел;
- многочлены;
- неравенства;
- геометрия;
- комбинаторика;
- теория графов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются.

Оглавление

Глава 1

Зяблики (8-2)

УТЮМовский разнобой

1. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство

$$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2 + 4ab + 1\,.$$

2. Найдите такое наименьшее натуральное число n, что в каждом наборе, состоящем из n натуральных чисел, найдутся три различных числа a, b и c, для которых $ab + bc + ca$ делится на 3.

3. При каких натуральных n число $4^n + 6^n + 9^n$ является точным квадратом?

4. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + S(n) = 99\ldots98$ (99 девяток), где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n?

5. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство

$$128(a + b + c + d) < (4 + a^2)(4 + b^2)(4 + c^2)(4 + d^2)\,.$$

6. В ряд выписано 1000 натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — куб натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — куб натурального числа.

7. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых $xy^2 + 7$ делится на $x^2y + x$.

8. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!\,)^2 \cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

Числа. Простые и не очень

1. Делится ли число $\underbrace{66\ldots6}_{2007\text{ цифр}}$ на 9?

2. Простым или составным является число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$?

3. Найдите все натуральные n, для которых число $n^5 + n + 1$ является простым.

4. Найдите все целые a и b такие, что $a^4 + 4b^4$ является простым числом.

5. Известно, что $a = 3^{2004} + 2$. Верно ли, что $a^2 + 2$ — простое число?

6. Докажите, что число $1998 \cdot 2000 \cdot 2002 \cdot 2004 + 16$ является квадратом натурального числа.

7. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot962} - \underbrace{22\ldots2}_{962}$ является квадратом некоторого натурального числа.

8. Сравните числа: $99!$ и 50^{99}.

9. При каком наименьшем n число $\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}$ кратно 17?

10. Сравните дроби: $\dfrac{2006}{2007}$ и $\dfrac{20062006}{20072007}$.

11. Докажите, что $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{12} + \ldots + \dfrac{1}{100} > 1$.

12. Докажите, что $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{98} - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100} > \dfrac{1}{5}$.

НОД и НОК

1. Найдите $(451, 287)$; $(1381955, 690713)$.

2. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

3. Найдите наибольший общий делитель чисел $2n + 13$ и $n + 7$.

4. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ несократима ни при каком натуральном n.

5. Найдите $(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$.

6. Докажите, что среди чисел $10^{100} + 1$, $10^{101} + 1$, $10^{102} + 1$, $10^{103} + 1$ найдется число, взаимно простое с остальными тремя.

7. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

8. Докажите, что если $[a, a + 5] = [b, b + 5]$ (a, b — натуральные), то $a = b$.

9. Докажите, что (bc, ca, ab) делится на $(a, b, c)^2$.

10. Вася выписал на доске 100 чисел меньших, чем сотое по счету простое число. Докажите, что какое-то из выписанных чисел является делителем произведения остальных 99.

11. Даны натуральные числа a и b. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a = b$.

12. Известно, что $(m, n) = 1$. Каково наибольшее возможное значение $(m + 2000n, n + 2000m)$?

Вильсон, Ферма и другие

1. Докажите, что для любого остатка x по модулю p (кроме нулевого) существует обратный y, то есть такой, что $xy \equiv 1 \pmod{p}$.

2. Найдите все остатки, обратные самим себе.

3. **Теорема Вильсона.** Докажите, что $(p-1)!+1$ делится на p, где p — простое.

4. Докажите, что если $n > 1$ и $(n-1)!+1$ делится на n, то n — простое число.

5. Докажите, что p — простое тогда и только тогда, когда $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.

6. Докажите, что $(2p-1)!-p$ делится на p^2.

7. Докажите, что числа p и $p+2$ являются простыми числами-близницами тогда и только тогда, когда $4\big((p-1)!+1\big)+p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$.

8. При каких k число C_p^k делится на p при простом p?

9. Докажите, что если n — составное, то хотя бы один из биномиальных коэффициентов $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ не кратен n.

10. Докажите малую теорему Ферма по индукции (если $(a^p - a)$ делится на p, то $(a+1)^p - (a+1)$ делится на p).

11. Пусть $p > 2$ — простое число. Сколькими способами можно провести через вершины правильного p-угольника замкнутую ориентированную p-звенную ломаную? (Ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми). Найдите формулу и выведите из нее теорему Вильсона.

12. *Лемма об уточнении.* Докажите, что если $a \equiv b \pmod{p}$, то $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

Найдите модуль!

Решите уравнения в целых числах, если не указано иное.

0. $x^2 = 3y + 2$.

1. $x^2 + y^2 - 8t = 6$.

2. $200x^2 - 2y^2 = 2002$.

3. $x^3 + 218 = y(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)(y+5)$.

4. $19x^3 - 17y^3 = 50$.

5. $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

6. $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$.

7. $6^x = y^2 + y - 2$.

8. Докажите, что уравнение $x^2 = y^5 - 4$ не имеет решений в целых числах.

9. $2^x + 7 = y^2$.

10. $3^x + 5 = 2^y$.

Симметрия

1. Дан треугольник ABC. На лучах AB, AC отложили такие точки C', B', что $AB' = AB$, $AC' = AC$. Прямая $B'C'$ пересекла сторону BC в точке L. Докажите, что AL — биссектриса треугольника ABC.

2. Внутри угла отмечена точка M. С помощью циркуля и линейки отметьте на сторонах угла точки A и B так, чтобы M была серединой AB.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

4. В выпуклом шестиугольнике пары противоположных сторон параллельны и равны. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

5. Пусть B' и C' — проекции вершины A на биссектрисы углов B и C треугольника ABC соответственно.
(a) Докажите, что прямая $B'C'$ параллельна BC;
(b) докажите, что если $AB' = AC'$, то $AB = AC$.

6. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

7. Может ли ограниченная фигура иметь более одного центра симметрии? А неограниченная?

8. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

9. Некоторая окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, восстановленные в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, восстановленные в точках A_2, B_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

10. На диаметре AB окружности отмечена случайная точка X. Через точку X проведена хорда CD, пересекающая хорду AB под углом 45°. Докажите, что величина $CX^2 + DX^2$ не зависит от выбора точки X.

Параллельный перенос

1. Два селения (точки на плоскости) расположены на разных берегах реки (полоса, ограниченная парой параллельных прямых). С помощью циркуля и линейки определите положение места, в котором необходимо построить мост (отрезок, перпендикулярный берегам), так чтобы время пути из одного селения в другое было минимальным.

2. Некоторую точку плоскости отразили центрально последовательно относительно вершин треугольника ABC шесть раз в следующем порядке: A, B, C, A, B, C. Докажите, что точка вернулась на свое исходное место.

3. Пусть MN — общая хорда двух окружностей радиуса 1. Луч с началом на отрезке MN перпендикулярный MN пересекает окружности в точках P и Q. Докажите, что $MN^2 + PQ^2 = 4$.

4. Две окружности радиуса 1 касаются друг друга в точке A. На окружностях выбрано по одной точке B и C таким образом, что $\angle BAC = 90^\circ$. Докажите, что $BC = 2$.

5. На плоскости даны треугольник, окружность, отрезок длины a и прямая ℓ. Циркулем и линейкой постройте точку A на границе треугольника и точку B на окружности, так чтобы длина AB была равна a и прямые AB и ℓ были параллельны.

6. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка X. Точка Y плоскости такова, что $XY \parallel AB$ и $CY \parallel AM$. Докажите, что $BX = AY$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямая, соединяющая середины сторон BC и AD пересекает прямые AB и CD под равными углами.

8. Даны две окружности, лежащие вне друг друга, и прямая ℓ. Циркулем и линейкой постройте прямую, параллельную ℓ, высекающую на этих окружностях равные хорды.

9. Внутри квадрата со стороной 1 лежит фигура (объединение многоугольников) площади S, у которой нет пары точек на расстоянии ровно 0,001. Докажите что
(a) $S < 0{,}51$; **(b)** $S < 0{,}34$.

Поворот

1. Докажите, что треугольник ABC является равносторонним тогда и только тогда, когда вершина B переходит в вершину C при повороте с центром A и углом $\pm 60°$.
2. При некотором повороте на угол α точка A переходит в A', а точка B переходит в точку B'. Докажите, что угол между направленными отрезками AB и $A'B'$ равен α (все углы в этой задаче считаются против часовой стрелки).
3. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X. Докажите, что прямые, проведенные через вершины B, C, D, A перпендикулярно прямым AX, BX, CX, DX соответственно, пересекаются в одной точке.
5. На отрезке AC отмечена точка B. Треугольники ABX и BCY — равносторонние и лежат в одной полуплоскости относительно AC. Докажите, что точка B и середины отрезков AY и CX служат вершинами равностороннего треугольника.
6. Через вершину A квадрата $ABCD$ внутри угла BAD проведено два луча. Докажите, что отрезок, соединяющий проекции вершины B на эти лучи, равен и перпендикулярен отрезку, соединяющему проекции вершины D на эти лучи.
7. Даны три параллельные прямые. Циркулем и линейкой отметьте по точке на каждой прямой, являющиеся вершинами равностороннего треугольника.
8. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами равностороннего треугольника.
9. На сторонах AB, AC треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна PQ.
10. Даны два поворота с центрами A и B и с известными углами α и β, причем $\alpha + \beta \neq 360°$.
   (a) Циркулем и линейкой постройте неподвижную точку композиции этих поворотов.
   (b) Докажите, что композицией этих поворотов является поворот на угол $\alpha + \beta$.

Игры и стратегии — 1

1. **(a)** В ряд лежат несколько мандаринок. Петя и Вася едят по очереди одну или две соседние мандаринки; кто не может ничего съесть, тот проиграл. Кто выиграет при правильной игре?
(b) Кто победит, если мандаринки лежат по кругу?

2. **(a)** На столе лежат 125 спичек. За ход разрешается взять 1, 2, 3 или 4 спички. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?
(b) Кто выиграет, если за ход разрешается взять 1, 2, 3, 4 или 7 спичек?
(c) А если разрешается взять 1, 2 или 4?

3. На доске написано число 12345. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан ноль. Кто выиграет при правильной игре.

4. На клетчатой доске 4×4 играют двое. Ходят по очереди, и каждый играющий своим ходом закрашивает одну клетку. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, состоящий из закрашенных клеток. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На столе донышками вниз стоит 2015 пустых стаканов. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй — не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы один стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы будут расположены донышками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

6. **(a)** На доске 16×16 стоит ферзь. Его можно двигать либо вправо, либо вверх, либо вверх-вправо. Проигрывает тот, кто не может ходить. При каких начальных положениях ферзя второй игрок победит?
(b) В двух кучках n и k камней соответственно. За ход разрешается взять либо несколько камней из одной кучки, либо поровну из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n и k, не превосходящих 15, у первого игрока нет выигрышной стратегии?

7. Дана шоколадка 700×2015 (700 — высота, 2015 — ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше либо равна ширине, а второму — меньше либо равна ширине. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выигрывает при правильной игре?

Игры и стратегии — 2. Выигрышные и проигрышные позиции

1. В кучке лежит 2015 конфет. Два игрока по очереди берут 2, 4 или 9 конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Игра начинается с числа 2015. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выиграет при правильной игре?

3. На столе лежит 300 монет. За ход разрешается забрать не более половины имеющихся монет. Проигрывает тот, кто не может забрать хотя бы одну монету. Кто выиграет при правильной игре?

4. Двое ребят играют в такую игру. Первый называет число от 2 до 9, второй умножает его на любое число от 2 до 9, первый умножает результат на любое число от 2 до 9 и т. д. Выигрывает тот, у кого впервые получилось число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?

5. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки ($1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.

6. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a+1$, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

7. У дракона есть 2015! золотых монет. Два хоббита по очереди воруют у дракона по p^n монет, где p — простое число, а $n = 1, 2, \ldots$ (например, первый берет 9 монет, второй 7, первый 64 и т. д.). Того, кто не может ничего украсть, съедает дракон. Может ли кто-нибудь из хоббитов гарантировать свое выживание?

Игры и стратегии — 3

1. На листе клетчатой бумаги отмечены 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9. Два игрока по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных узла. Игрок, после чьего хода образуется один или несколько квадратиков, закрашивает их в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасил больше квадратиков. Кто выиграет при правильной игре?

2. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке. Костя хочет, чтобы сумма на его карточках делилась на 25. Сможет ли Виталик ему помешать, если
(a) Костя ходит вторым; **(b)** Костя ходит первым?

3. В крайних клетках полоски 1×103 стоит по фишке. Саша и Паша ходят по очереди: за ход можно сдвинуть свою фишку вправо или влево на любое количество клеток от 1 до 4, но нельзя перепрыгивать через фишку противника и ставить две фишки на одну клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Саша. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно
(1) либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;
(2) либо разделить одно из чисел пополам, если оно четное.
Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. На доске написано число 10^{2015}. Двое играют в следующую игру. За один ход с доски можно стереть два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведение дающих n, но меньших него. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы М и П, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдает посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

Графы. Деревья

1. **(a)** Пусть в графе нет циклов и вершин степени ноль. Докажите, что есть вершина степени один. Такая вершина, кстати, еще называется *висячей.*
(b) Докажите, что их на самом деле хотя бы две.
(c) Пусть в графе есть вершина степени d. Докажите, что висячих вершин на самом деле хотя бы d.

Определение. Связный граф без циклов называется *деревом.*

2. Докажите, что в дереве с n вершинами всегда ровно $(n-1)$ ребер.

3. Каким может быть количество висячих вершин в дереве на n вершинах?

4. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую?

5. Туристическая фирма провела акцию: «Купи путевку в Египет, приведи четырех друзей, которые также купят путевку, и получи стоимость путевки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

6. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

7. Докажите, что все следующие утверждения эквивалентны:
(1) граф G — дерево;
(2) любые две вершины графа G соединены единственным простым путем;
(3) граф G связен и $p = q + 1$, где p — количество вершин, а q — количество ребер;
(4) граф G — ацикличен (не содержит циклов), и $p = q + 1$, где p — количество вершин, а q — количество ребер;
(5) граф G — ацикличен, и при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл;
(6) граф G — связный граф, отличный от K_p для $p \geqslant 3$, а также при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл;
(7) граф G — граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, а также $p = q + 1$, где p — количество вершин, а q — количество ребер, и при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл.

Графы. Связность

Остовные деревья

1. Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть несколько ребер так, чтобы получилось дерево (такое дерево называется *остовным*).

2. Может ли у графа быть ровно два остовных дерева?

3. Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть вершину так, что он не потеряет связности.

Связность

4. В графе на n вершинах степень каждой вершины не меньше $n/2$. Докажите, что он связен.

5. В графе на n вершинах каждая соединена с каждой (такой граф обозначается через K_n). Какое наименьшее число ребер нужно удалить, чтобы граф стал несвязным?

6. В графе есть две доли — из n и из m вершин. Все вершины из разных долей соединены друг с другом, из одной доли — нет (такой граф обозначается через $K_{m,n}$). Какое наименьшее число ребер нужно удалить, чтобы граф стал несвязен?

7. Докажите, что если в несвязном графе все ребра заменить на неребра, а неребра на ребра (то есть соединить все несмежные вершины и разъединить смежные), то получится связный граф.

Задача-аукцион

8. Оцените снизу количество связных графов на 10 вершинах.

Добавка

9. В связном графе на 100 вершинах 199 ребер. Докажите, что из графа можно удалить все ребра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.

10. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими.
(a) Докажите, что если отменить любые $(n-1)$ рейсов, то все равно из любого города можно добраться в любой другой на самолетах (с пересадками).
(b) Укажите все случаи, когда связность нарушается при отмене n рейсов.

Глава 2

Снегири (8-1)

УТЮМовский разнобой

1. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство

$$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2 + 4ab + 1\,.$$

2. При каких натуральных n число $4^n + 6^n + 9^n$ является точным квадратом?

3. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + S(n) + 1 = 2015^{2014}$, где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n?

4. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство

$$128(a + b + c + d) < (4 + a^2)(4 + b^2)(4 + c^2)(4 + d^2)\,.$$

5. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых $xy^2 + 7$ делится на $x^2y + x$.

6. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!\,)^2 \cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

7. Назовем натуральное число *хорошим,* если оно представимо в виде суммы трех натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

8. Целые числа x и y таковы, что $(x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y)$ и $(x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y)$ делятся на 17. Докажите, что $(xy - 12x + 15y)$ также делится на 17.

9. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $d_n + d_{n+1}$ является точным квадратом.

Числа. Простые и не очень

1. Делится ли число $\underbrace{66\ldots6}_{2007\text{ цифр}}$ на 9?

2. Простым или составным является число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$?

3. Найдите все натуральные n, для которых число $n^5 + n + 1$ является простым.

4. Найдите все целые a и b такие, что $a^4 + 4b^4$ является простым числом.

5. Известно, что $a = 3^{2004} + 2$. Верно ли, что $a^2 + 2$ — простое число?

6. Докажите, что число $1998 \cdot 2000 \cdot 2002 \cdot 2004 + 16$ является квадратом натурального числа.

7. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{2\cdot962} - \underbrace{22\ldots2}_{962}$ является квадратом некоторого натурального числа.

8. Сравните числа: $99!$ и 50^{99}.

9. При каком наименьшем n число $\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}$ кратно 17?

10. Сравните дроби: $\dfrac{2006}{2007}$ и $\dfrac{20062006}{20072007}$.

11. Докажите, что $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{12} + \ldots + \dfrac{1}{100} > 1$.

12. Докажите, что $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{98} - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100} > \dfrac{1}{5}$.

13. Пусть целые a, b и c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ делится на $(abc)^2$. Докажите, что $a = b = c$.

НОД и НОК

1. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых НОК равно 2000?
2. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ несократима при всех натуральных n.
3. Найдите $(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.
4. Докажите, что среди чисел $10^{100}+1$, $10^{101}+1$, $10^{102}+1$, $10^{103}+1$ найдется число, взаимно простое с остальными тремя.
5. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $(a,b)\cdot[a,b]=ab$.
6. Докажите, что $abc=[a,b,c]\cdot(ab,bc,ca)=[ab,bc,ca]\cdot(a,b,c)$ для любых натуральных a,b,c.
7. Докажите, что если $[a,a+5]=[b,b+5]$ (a,b — натуральные), то $a=b$.
8. Вася выписал на доске 100 чисел меньших, чем сотое по счету простое число. Докажите, что какое-то из выписанных чисел является делителем произведения остальных 99.
9. Даны натуральные числа a и b. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a=b$.
10. Известно, что $(m,n)=1$. Каково наибольшее возможное значение $(m+2000n, n+2000m)$?
11. Найдите все натуральные n, для которых $n2^{n-1}+1$ является точным квадратом.

Вильсон, Ферма и другие

1. Докажите, что p — простое тогда и только тогда, когда $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.

2. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2.

3. Докажите, что числа p и $p+2$ являются простыми числами-близницами тогда и только тогда, когда $4\big((p-1)!+1\big) + p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$.

4. При каких k число C_p^k делится на p при простом p?

5. Докажите, что если n — составное, то хотя бы один из биномиальных коэффициентов $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ не кратен n.

6. Докажите малую теорему Ферма по индукции (если $(a^p - a)$ делится на p, то $(a+1)^p - (a+1)$ делится на p).

7. Пусть $p > 2$ — простое число. Сколькими способами можно провести через вершины правильного p-угольника замкнутую ориентированную p-звенную ломаную? (Ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми). Найдите формулу и выведите из нее теорему Вильсона.

8. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{p}$, то $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

9. Для натурального числа n обозначим все его делители: $n = d_1 > d_2 > \dots > d_k = 1$. Докажите, что $d_1 - d_2 + d_3 - \dots + (-1)^{k-1} d_k = n - 1$ тогда и только тогда, когда n — простое или $n = 4$.

10. Для натурального числа n обозначим все его делители: $n = d_1 > d_2 > \dots > d_k = 1$. Докажите, что существует такое $n > 10^{1000}$, что $d_1 - d_2 + d_3 - \dots + (-1)^{k-1} d_k = 2n/3$.

11. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида $10^n + 3$.

12. Найдите все числа, взаимно простые с каждым из чисел вида $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Найдите модуль!

Решите уравнения в целых числах, если не указано иное.

1. $x^3 + 218 = y(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)(y+5)$.

2. $19x^3 - 17y^3 = 50$.

3. $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

4. $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$.

5. $6^x = y^2 + y - 2$.

6. Докажите, что уравнение $x^2 = y^5 - 4$ не имеет решений в целых числах.

7. $2^x + 7 = y^2$.

8. $2^x = 3^y + 7$ в натуральных числах.

9. $2^x - 5 = 11^y$ в натуральных числах.

10. $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 2015$.

11. $3^x + 5 = 2^y$.

12. $x^5 + y^7 = 10000$.

Симметрия

1. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

2. Может ли ограниченная фигура иметь более одного центра симметрии? А неограниченная?

3. Внутри угла отмечена точка M. С помощью циркуля и линейки отметьте на сторонах угла точки A и B так, чтобы M была серединой AB.

4. Даны две концентрические окружности. С помощью циркуля и линейки проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

5. В выпуклом десятиугольнике пары противоположных сторон параллельны и равны. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

6. Пусть B' и C' — проекции вершины A на биссектрисы углов B и C треугольника ABC соответственно.
   (a) Докажите, что прямая $B'C'$ параллельна BC;
   (b) докажите, что если $AB' = AC'$, то $AB = AC$.

7. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

8. Некоторая окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, восстановленные в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, восстановленные в точках A_2, B_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

9. На диаметре AB окружности отмечена случайная точка X. Через точку X проведена хорда CD, пересекающая хорду AB под углом $45°$. Докажите, что величина $CX^2 + DX^2$ не зависит от выбора точки X.

10. *Теорема Монжа.* Докажите, что перпендикуляры, проведенные из середин сторон или диагонали вписанного в окружность четырехугольника к противоположным сторонам или другой диагонали соответственно, пересекаются в одной точке.

Параллельный перенос

1. Два селения (точки на плоскости) расположены на разных берегах реки (полоса, ограниченная парой параллельных прямых). С помощью циркуля и линейки определите положение места, в котором необходимо построить мост (отрезок, перпендикулярный берегам), так чтобы время пути из одного селения в другое было минимальным.

2. На плоскости даны треугольник, окружность, отрезок длины a и прямая ℓ. Циркулем и линейкой постройте точку A на границе треугольника и точку B на окружности, так чтобы длина AB была равна a и прямые AB и ℓ были параллельны.

3. Некоторую точку плоскости отразили центрально последовательно относительно вершин треугольника ABC шесть раз в следующем порядке: A, B, C, A, B, C. Докажите, что точка вернулась на свое исходное место.

4. Две окружности радиуса 1 касаются друг друга в точке A. На окружностях выбрано по одной точке B и C таким образом, что $\angle BAC = 90^\circ$. Докажите, что $BC = 2$.

5. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка X. Точка Y плоскости такова, что $XY \parallel AB$ и $CY \parallel AM$. Докажите, что $BX = AY$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямая, соединяющая
(a) середины сторон BC и AD **(b)** середины диагоналей AC и BD
пересекает прямые AB и CD под равными углами.

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка X. Докажите, что если $\angle XAB = \angle XCB$, то $\angle XBC = \angle XDC$.

8. Даны две окружности, лежащие вне друг друга, и прямая ℓ. Циркулем и линейкой постройте прямую, параллельную ℓ, высекающую на этих окружностях равные хорды.

9. Внутри квадрата со стороной 1 лежит фигура (объединение многоугольников) площади S, у которой нет пары точек на расстоянии ровно 0,001. Докажите что
(a) $S < 0{,}51$; **(b)** $S < 0{,}34$. **(c)** $S < 0{,}29$.

Теорема Шаля

Преобразование f плоскости называется *изометрией* или *движением*, если для любых двух точек плоскости A и B расстоянием между ними равно расстоянию между точками $f(A)$ и $f(B)$.

Теорема Шаля о классификации изометрий плоскости. Любая изометрия плоскости есть параллельный перенос, поворот или скользящая симметрия.

1. Докажите, что композиция $g \circ f$ двух изометрий f и g — также изометрия.

2. Докажите, что параллельный перенос, поворот и осевая симметрия — примеры изометрий.
Замечание: центральная симметрия — это поворот на $180°$.

3. Пусть A и B — различные точки плоскости, а a и b — неотрицательные числа. Докажите, что существует не более двух точек X плоскости, таких что $AX = a$ и $BX = b$.

4. Пусть A, B, C — вершины треугольника, а a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что существует не более одной точки X плоскости, такой что $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$.

5. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, причем $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$. Докажите, что существует не более одной изометрии, переводящей точки A, B, C в точки A', B', C' соответственно.

6. Даны две пары различных точек A, B и A', B', причем $AB = A'B'$. Докажите, что существует не более двух изометрий, переводящих A в A', а B в B'.

7. Направленные отрезки AB и $A'B'$ равны по длине и сонаправлены. Докажите, что существует параллельный перенос, переводящий A в A', а B в B'.

8. Направленные отрезки AB и $A'B'$ равны по длине, но не сонаправлены. Докажите, что существует поворот, переводящий A в A', а B в B'.
Наводящий вопрос: как построить центр такого поворота?

Определение. *Скользящей симметрией* относительно прямой ℓ и вектора $\boldsymbol{v}$, параллельного ℓ, называется композиция симметрии относительно прямой ℓ и параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{v}$.

9. Направленные отрезки AB и $A'B'$ равны по длине. Докажите, что существует скользящая симметрия, переводящая A в A', а B в B'.
Еще один наводящий вопрос: как построить ось симметрии?

10. Пусть f — (1) параллельный перенос, (2) поворот или (3) осевая симметрия.
Рассмотрим направление (против или по часовой стрелке), в котором нужно обойти вершины A, B, C треугольника ABC, чтобы посетить их в таком порядке. Какие из типов преобразований (1), (2), (3) меняют направление обхода контура треугольника на противоположное, а какие — нет?
Эта задача позволит нам поделить все изометрии на меняющие ориентацию плоскости и сохраняющие ориентацию плоскости.

11. Перечитайте формулировки всех предыдущих задач этого листика еще раз.

12. Докажите теорему Шаля о классификации изометрий плоскости.

Вот это поворот

1. Как изометрии, сохраняющие ориентацию, действуют на множестве векторов плоскости? Ответив на этот вопрос и вспомнив теорему Шаля, определите, каким преобразованием плоскости является композиция

(a) двух параллельных переносов на векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$;

(b) параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{u}$ и поворота на угол α;

(c) двух поворотов с углами α и β?

Местоположение центров поворотов неизвестно, если ответом к одному из пунктов служит поворот, то его центр находить не требуется.

2. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

3. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X. Докажите, что прямые, проведенные через вершины B, C, D, A перпендикулярно прямым AX, BX, CX, DX соответственно, пересекаются в одной точке.

4. На отрезке AC отмечена точка B. Треугольники ABX и BCY — равносторонние и лежат в одной полуплоскости относительно AC. Докажите, что точка B и середины отрезков AY и CX служат вершинами равностороннего треугольника.

5. Через вершину A квадрата $ABCD$ внутри угла BAD проведено два луча. Докажите, что отрезок, соединяющий проекции вершины B на эти лучи, равен и перпендикулярен отрезку, соединяющему проекции вершины D на эти лучи.

6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точка A и середины отрезков BD и EF являются вершинами равностороннего треугольника.

7. На продолжениях высот, опущенных из вершин B, C остроугольного треугольника ABC, отмечены точки B_1, C_1 соответственно, так что $BB_1 = AC$, $CC_1 = AB$. Докажите, что отрезки AB_1 и AC_1 перпендикулярны и равны.

8. На сторонах AB, AC треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна PQ.

9. Даны два поворота с центрами A и B и с известными углами α и β, причем $\alpha + \beta \neq 360°$. Циркулем и линейкой постройте неподвижную точку композиции этих поворотов.

Игры и стратегии — 1

1. По кругу лежат несколько мандаринок. Петя и Вася едят по очереди одну или две соседние мандаринки; кто не может ничего съесть, тот проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

2. **(a)** На доске 16×16 стоит ферзь. Его можно двигать либо вправо, либо вверх, либо вверх-вправо. Проигрывает тот, кто не может ходить. При каких начальных положениях ферзя второй игрок победит?
(b) В двух кучках n и k камней соответственно. За ход разрешается взять либо несколько камней из одной кучки, либо поровну из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n и k, не превосходящих 15, у первого игрока нет выигрышной стратегии?

3. На доске написано число 12345. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан ноль. Кто выиграет при правильной игре?

4. На столе донышками вниз стоит 2015 пустых стаканов. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй — не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы один стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы будут расположены донышками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

5. Дана шоколадка 700×2015 (700 — высота, 2015 — ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше либо равна ширине, а второму — меньше либо равна ширине. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выигрывает при правильной игре?

6. *Уголком размера* $n \times m$, где $m, n \geqslant 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить клетки дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

7. У дракона есть $2015!$ золотых монет. Два хоббита по очереди воруют у дракона по p^n монет, где p — простое число, а $n = 1, 2, \ldots$ (например, первый берет 9 монет, второй 7, первый 64 и т. д.). Того, кто не может ничего украсть, съедает дракон. Может ли кто-нибудь из хоббитов гарантировать свое выживание?

8. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \ldots, n$) подряд идущих знаков таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать ее (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

Игры и стратегии — 2

1. На листе клетчатой бумаги отмечены 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9. Два игрока по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных узла. Игрок, после чьего хода образуется один или несколько квадратиков, закрашивает их в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасил больше квадратиков. Кто выиграет при правильной игре?

2. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке. Костя хочет, чтобы сумма на его карточках делилась на 25. Сможет ли Виталик ему помешать, если
(a) Костя ходит вторым; **(b)** Костя ходит первым?

3. В крайних клетках полоски 1×103 стоит по фишке. Саша и Паша ходят по очереди: за ход можно сдвинуть свою фишку вправо или влево на любое количество клеток от 1 до 4, но нельзя перепрыгивать через фишку противника и ставить две фишки на одну клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Саша. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно
(1) либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;
(2) либо разделить одно из чисел пополам, если оно четное.
Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. На доске написано число 10^{2015}. Двое играют в следующую игру. За один ход с доски можно стереть два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведение дающих n, но меньших него. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы М и П, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справа налево), то Печкин отдает посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

7. На доске нарисован правильный 108-угольник. Двое по очереди закрашивают его вершины. Проигрывает тот, после чьего хода несколько закрашенных вершин образуют правильный многоугольник. Кто выиграет при правильной игре?

Игры и стратегии — 3

1. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге по таким правилам: первый ставит два крестика, второй — нолик, первый — снова два крестика, второй — нолик и т. д. Первый выигрывает, когда на одной вертикали или горизонтали стоит рядом k крестиков. Докажите, что первый всегда может добиться победы, если
(a) $k = 6$; **(b)** $k = 100$.

2. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причем на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).

3. Двое игроков отмечают точки плоскости. Сначала первый отмечает точку красным цветом, затем второй отмечает 100 точек синим, затем первый снова одну точку красным, второй 100 точек синим и так далее. (Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя.) Докажите, что первый может построить правильный треугольник с красными вершинами.

4. Двое по очереди обводят цветными карандашами стороны клеток на клетчатой бумаге. Первый игрок обводит красным, второй — синим. За каждый ход можно обвести отрезок между соседними узлами сетки (составляющий сторону клетки), если этот отрезок еще не обведен другим игроком. Докажите, что второй (синий) игрок может помешать первому образовать красную замкнутую линию.

Графы. Деревья

Определение. Связный граф без циклов называется *деревом*.

1. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую?

2. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

3. Докажите, что все следующие утверждения эквивалентны:
(1) граф G — дерево;
(2) любые две вершины графа G соединены единственным простым путем;
(3) граф G связен и $p = q + 1$, где p — количество вершин, а q — количество ребер;
(4) граф G — ацикличен (не содержит циклов), и $p = q + 1$, где p — количество вершин, а q — количество ребер;
(5) граф G — ацикличен, и при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл;
(6) граф G — связный граф, отличный от K_p для $p \geqslant 3$, а также при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл;
(7) граф G — граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, а также $p = q + 1$, где p — количество вершин, а q — количество ребер, и при добавлении любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл.

4. Докажите, что в графе можно раскрасить не более половины вершин так, чтобы любая нераскрашенная вершина была соединена ребром с одной из раскрашенных.

5. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

6. Пусть граф G таков, что при выкидывании любой вершины он остается связным. Докажите, что в нем между любыми двумя вершинами существует хотя бы два непересекающихся пути.

7. *«Пятнашки на графе».* Дан двусвязный граф (при выкидывании любой вершины он остается связным). В нем есть треугольник (цикл длины три). Одна вершина пустая, а в остальных расставлены различные фишки. Фишки можно перемещать на смежную пустую вершину. Докажите, что можно добиться произвольной расстановки фишек.

Графы. Связность

Остовные деревья

1. Может ли у графа быть ровно два остовных дерева?

2. Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть вершину так, что он не потеряет связности.

3. В стране n городов, между некоторыми есть дороги. Известно, что из каждого города можно попасть в каждый, причем из каждого города выходит не более d дорог. Докажите, что всю страну можно разделить на два региона так, что в каждом регионе можно будет из любого города попасть в любой и размер каждого региона будет не меньше $\lfloor \frac{n-1}{d} \rfloor$.

А он ещё губку придумал

4. Пусть дан граф, который при выкидывании любой вершины граф остается связным.
(a) Докажите, что через каждую вершину проходит несамопересекающийся цикл.
(b) Из всех несамопересекающихся циклов, проходящих через вершину u, выберем тот, до которого можно дойти из вершины v, пройдя по минимальному возможному числу ребер. Докажите, что v просто лежит на этом цикле.

5. Пусть при выкидывании любых k вершин граф остается связным. Докажите, что для любых $k+1$ вершин найдется несамопересекающийся цикл, содержащий все эти вершины.

Задача-аукцион

6. Оцените сверху количество связных графов на 10 вершинах.

Добавка

7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из n авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса были закрыты $(n-1)$ рейсов, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из каждого города можно долететь до любого другого.

8. Обозначим через C_n количество связных графов на n вершинах. Придумайте алгоритм, вычисляющий C_n за $O(n^2)$.

Глава 3

Дополнительные материалы

УТЮМовский разнобой. Решения

1/1. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство

$$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2 + 4ab + 1\,.$$

Подсказка. Сделайте замену $b = a + x$.

2/-. Найдите такое наименьшее натуральное число n, что в каждом наборе, состоящем из n натуральных чисел, найдутся три различных числа a, b и c, для которых $ab + bc + ca$ делится на 3.

Ответ: 6. *Решение.* Недолгий перебор показывает, что $ab + bc + ca$ делится на 3 тогда и только тогда, когда все остатки от деления чисел a, b и c на 3 одинаковы, либо хотя бы два из этих чисел делятся на 3. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 такую тройку выбрать нельзя, так что чисел должно быть хотя бы шесть. Возьмем любые 6 натуральных чисел. Если среди них нет двух чисел, делящихся на 3, то хотя бы у пяти из них остатки от деления на 3 равны 1 или 2. Но тогда найдутся три числа с одинаковыми остатками.

3/2. При каких натуральных n число $4^n + 6^n + 9^n$ является точным квадратом?

Ответ: ни при каких. *Решение.* $4^n + 6^n + 9^n = a^2 \quad\Rightarrow\quad (2^n + 3^n)^2 - 6^n = a^2 \quad\Rightarrow$ $6n = (2n + 3n - a)(2n + 3n + a)$. Так как $2^n + 3^n$ не делится ни на 2, ни на 3, a тоже не делится ни на 2, ни на 3. Поэтому ровно одна из этих скобок делится на 3, а значит, и на 3^n. Тогда это должна быть бо́льшая скобка. Значит, $2^n + 3^n + a$ делится на 3^n. Обе эти скобки четные, но на 4 делится только одна из них, так как их разность $2a$ на 4 не делится. Разберем два случая.
(1) Вторая скобка не делится на 4. Тогда имеем $2^n + 3^n - a = 2^{n-1}$ и $2^n + 3^n + a = 2 \cdot 3^n$. Из первого следует, что $a > 3n$, а из второго следует, что $a < 3n$. Поэтому этот случай невозможен.
(2) Первая скобка не делится на 4. Тогда она вообще равна 2 и $a = 2^n + 3^n - 2$. Тогда вторая скобка будет равна $2(2^n + 3^n - 1)$, и это должно быть равно $2^{n-1} \cdot 3^n$. Пусть $x = 2^n$, $y = 3^n$, тогда $2(x + y - 1) = xy/2 \quad\Rightarrow\quad xy = 4x + 4y - 4 \quad\Rightarrow\quad (x - 4)(y - 4) = 12?(3^n - 4)(2^n - 4) = 12$. Чтобы левая часть делилась на 4, n должно быть больше 1. Но если $n > 2$, то $3^n - 4 > 12$, а вариант $n = 2$, как легко убедиться, тоже не подходит.

4/-. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + S(n) = 99{\ldots}98$ (99 девяток), где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n?

Ответ: не существует. *Решение.* Как известно, число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Перебирая все возможные остатки $0, 1, \ldots, 8$ от деления числа n на 9, убеждаемся, что ни в одном из случаев сумма $n^2 + S(n)$ не дает остатка 8, как число 99…998.

-/3. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + S(n) + 1 = 2015^{2014}$, где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n?

Ответ: не существует. *Решение.* Положим $k = 2015^{1007}$. Тогда равенство из условия можно переписать в виде $S(n)+1 = k^2-n^2 = (k-n)(n+k)$, откуда $S(n) \geqslant n+k-1 > n$. Но, как легко видеть, $S(n) \leqslant n$ при любом натуральном n.

5/4. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство

$$128(a+b+c+d) < (4+a^2)(4+b^2)(4+c^2)(4+d^2)\,.$$

Решение. Если раскрыть скобки в правой части, то среди слагаемых будут 256 и $64(a^2+b^2+c^2+d^2)$. Забудем про все остальные слагаемые в правой части (они положительны), разделим обе части на 64 и применим неравенство $1+x^2 > 2x$.

6/-. В ряд выписано 1000 натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — куб натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — куб натурального числа.

Решение. Если произведение двух чисел — куб натурального числа, то для каждого простого числа сумма степеней, с которыми оно входит в разложения этих двух чисел на простые множители, делится на 3. Отсюда следует, что если взять два наших числа, идущие в ряду через одно, то для каждого простого числа показатели степеней, в которых оно входит в разложения этих двух чисел на простые множители, дают одинаковые остатки от деления на 3. Значит, набор остатков от деления на 3 показателей степеней, в которых простые числа входят в разложение на простые множители, один и тот же для всех чисел, стоящих в нашем ряду на четных местах. В частности, у 1000-го числа он такой же, как у второго, откуда и следует утверждение задачи.

7/5. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

Ответ: $x = 1, y = 1, 3, 7$; $x = y = 7$. *Решение.* Если xy^2+7 делится на x^2y+x, то 7 делится на x. Значит, $x = 1$ или $x = 7$. Если $x = 1$, y^2+7 должно делиться на $y+1$. Так как $y^2+7 = (y+1)(y-1)+8$, в этом случае необходимо и достаточно, чтобы 8 делилось на $y+1$, откуда $y = 1, 3, 7$. Если $x = 7$, $7y^2+7$ должно делиться на $49y+7$, то есть y^2+1 должно делиться на $7y+1$. Так как $49y^2+49 = (7y+1)(7y-1)+50$, в этом случае 50 должно делиться на $7y+1$. Проверка показывает, что годится только $y = 7$.

8/6. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!\,)^2\cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

Ответ: $a = 4$. *Решение.* Контрпример для $a = 3$ — $n = 5$. Докажем для $a = 4$. Поделив обе части неравенства на $(n!\,)^2$, получим неравенство $2^{2n} > (2n)!\,/(n!\,)^2$, которое следует из того, что 2^{2n} равно сумме всех биномиальных коэффициентов с основанием $2n$.

-/7. Назовем натуральное число *хорошим,* если оно представимо в виде суммы трех натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

Ответ: 24. *Решение.* Убедиться в том, что число 24 — нехорошее, можно с помощью разумно организованного перебора, например, такого: если $n = a+b+c$, c делится на b и b делится на a, то a — делитель n и число $n/a - 1 = (b/a)\cdot(c/b+1)$ составное. Но числа $24-1$, $12-1$, $8-1$, $6-1$, $4-1$ и даже $3-1$ простые. Докажем, что все числа, большие 24, хорошие. Очевидно, кратное хорошего числа тоже хорошее: если $n = a + b + c$, то $kn = ka + kb + kc$. Каждое нечетное число, не меньшее 7, хорошее: $2s + 3 = 1 + 2 + 2s$. Четные числа, кратные 5, хорошие, потому что $10 = 1 + 3 + 6$. Осталось рассмотреть степени двойки, большие 24, и числа вида $2^m \cdot 3$, большие 24. Первые хороши благодаря разложению $16 = 1 + 3 + 12$, а вторые — благодаря тому, что 48 делится на 16.

-/8. Целые числа x и y таковы, что $(x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y)$ и $(x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y)$ делятся на 17. Докажите, что $(xy - 12x + 15y)$ также делится на 17.

Решение. Все сравнения по модулю 17. Заметим, что $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = (x - y)(x - 2y + 1)$, то есть либо $x \equiv y$, либо $x \equiv 2y - 1$. В первом случае получим $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y \equiv 2x$, то есть x и y делятся на 17, откуда $xy - 12x + 15y$ делится на 17. Во втором случае $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y \equiv (2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y + y^2 - 5(2y - 1) + 7y$, откуда после преобразований получаем, что $y^2 - 5y + 6$ делится на 17. Также, $xy - 12x + 15y \equiv 2y^2 - 10y + 12 = 2(y^2 - 5y + 6)$. Значит, и в этом случае $xy - 12x + 15y$ делится на 17.

-/9. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $d_n + d_{n+1}$ является точным квадратом.

Решение. Заметим, что $d_{6+420k} + d_{7+420k} = 3 + 210k + 1 + 60k = 4 + 270k$. Среди чисел вида $4 + 270k$ содержатся квадраты всех чисел, дающих остаток 2 при делении на 270, значит, квадратов такого вида бесконечно много, откуда и вытекает утверждение задачи.