$$\int\limits_{\text{30 марта 2015}}^{\text{10 апреля 2015}} \begin{pmatrix} \text{Московские сборы} \\ \text{секция математики} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

Немного о группах

Занятия проходили в шести группах:

9-2 «Белые Ферзи»	10-2 «Белые Ладьи»	11-2 «Белые Слоны»
9-1 «Чёрные Ферзи»	10-1 «Чёрные Ладьи»	11-1 «Чёрные Слоны»

Группы 9-* были собраны из школьников, обучающихся в 9 классе; аналогично для 10-* и 11-*.

Группы *-1 были собраны из предположительно более сильных школьников, и задачи там в среднем сложнее, чем в соответствующих группах *-2.

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- *тренировочные олимпиады;*
- алгебра;
  - теория чисел;
  - многочлены;
  - неравенства;
- геометрия;
- комбинаторика;
  - теория графов.

Материалы, общие для нескольких групп, дублируются.

Немного об авторах

Материалы Аркадия Борисовича Скопенкова не представлены в сборнике. Их обновляемые версии можно найти по следующим ссылкам:
`http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf`
`http://www.mccme.ru/circles/oim/exalong.pdf`
`http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`

Материалы Александра Васильевича Шаповалова, представленные в этом сборнике, можно также найти (вместе с его материалами предыдущих лет) по ссылке:
`http://www.ashap.info/Uroki/Mosbory`

Оглавление

Глава 1

Белые Ферзи (9-2)

Тренировочная олимпиада — 1

1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель на 55 больше самого маленького собственного делителя. (*Собственными* называются все натуральные делители числа кроме него самого и единицы).

Олимпиада им. Кукина

2. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Числа $2x$, $4x$ и $5x$ оказались не целыми и не полуцелыми. Он округлил каждое из этих трех чисел до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите x.

А. Шаповалов

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

М. Волчкевич, 4-я устная олимпиада по геометрии, 2006 г.

4. На доске 50×50 выставлены более десяти ладей так, что каждое пустое поле и каждая ладья побита одинаковым числом ладей. Сколько всего ладей? (Ладья бьет поле или другую ладью на той же вертикали или горизонтали, если между ними нет других фигур. Ладья себя не бьет.)

А. Шаповалов

Тренировочная олимпиада — 2

1. Положительные числа a, b, c таковы, что система из двух уравнений $ax + b = c$ и $x/a + 1/b = 1/c$ имеет решение. Докажите, что

$$a/(a + b) + b/(a + 2c) = a/(a + c) + c/(a + 2b)\,.$$

2. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

3. Натуральные числа m и n и целое число k таковы, что $(k + m) \cdot (k + n) = k + m + n$. Докажите, что $m < 2n$.

4. На плоскости отмечены 58 точек. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть семью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть семью прямыми.

Разнобой по алгебре и теории чисел

1. Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \geqslant 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось Ox. Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.
(Заключительный этап-1998, 9.1)

2. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p, q, что $m+n = p+q$ и $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 1000$?
(Заключительный этап-2004, 9.5)

3. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.
(Заключительный этап-2005, 9.5)

4. Многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ таков, что $-2 \leqslant a + b + c \leqslant 0$. Известно, что у него 3 действительных корня. Докажите, что хотя бы один из корней принадлежит отрезку $[0; 2]$.
(Заключительный этап-2008, 9.2)

5. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне интервала — неотрицательны. Докажите, что найдется такое x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.
(Заключительный этап-2001, 9.2)

6. Докажите, что найдутся такие целые числа a, b, c, d, модули которых больше миллиона, что
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}\ .$$
(Заключительный этап-2006, 9.2)

7. Петя и Вася придумали десять квадратных трехчленов. После чего Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трехчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?
(Заключительный этап-2013, 9.6)

8. Обозначим за $S(x)$ сумму цифр числа x. Найдутся ли три таких натуральных числа a, b и c, что $S(a + b) < 5$, $S(a + c) < 5$ и $S(b + c) < 5$, но $S(a + b + c) > 50$?
(Заключительный этап-1998, 9.3)

9. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем $\frac{a_i^2}{a_i-1} > S$

для каждого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_1 + a_3} > 1\,.$$

(Заключительный этап-2005, 9.3)

Зацикливание остатков. Немного о малой теореме Ферма

0. Бывает ли так, что $7^k + 1$ делится на 32?

1. Известно, что $2^l + 3^k$ делится на 5. Докажите, что $(k + l - 2)$ делится на 4.

Если число является степенью простого, то других простых делителей у него нет.

2. Докажите, что $(2^k - 1)$ не может быть степенью
(a) пятерки; **(b)** тройки (кроме случая $(2^2 - 1) = 3^1$).

3. Какие члены последовательности Фибоначчи являются степенями двойки или тройки?

4. Может ли число $(12k + 5) \cdot (12l + 7)$ быть степенью простого числа?

5. **Геометрическое доказательство малой теоремы Ферма.** Сколькими способами можно покрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Способы, получающиеся друг из друга поворотами, считаем одинаковыми.)

6. **(a)** Натуральные a, b, c, d, e таковы, что $13 \mid a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12}$.
Докажите, что $13^5 \mid abcde$.
(b) Натуральные a, b, c, d, e таковы, что $13 \mid a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6$.
Докажите, что $13 \mid abcde$.

7. Докажите, что любой простой делитель числа $(2^p - 1)$ имеет вид $2kp + 1$.

Принцип Дирихле в теории чисел

1. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и нечетное число l, не делящееся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l.

2. Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

3. Докажите, что разрешимо сравнение

$$ax + by \equiv 0 \pmod{m}$$

для некоторых $|x|, |y| \leqslant \sqrt{m}$, $|x| + |y| > 0$.

4. Дано простое число p.
(a) Обозначим $k = \left[\sqrt{p}\right]$. Назовем остатки $-k, -k+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, k$ по модулю p *маленькими*. Докажите, что для любого остатка a существует такой ненулевой маленький остаток b, что остаток ab тоже маленький.
(b) Пусть $p \mid a^2 + 1$. Докажите, что p представимо в виде суммы двух квадратов.

5. Остаток a по простому модулю p называется *квадратичным вычетом* или просто *вычетом*, если разрешимо сравнение $a \equiv x^2 \pmod{p}$. Иначе a называется *невычетом*.
(a) Найдите количество квадратичных вычетов по модулю p и докажите, что произведение и частное (по модулю p) двух вычетов снова является вычетом.
(b) Докажите, что произведение двух невычетов является вычетом.

6. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.

Большие степени

1. Пусть $n = 561$. Докажите, что для любого натурального a выполнено $a^n \equiv a \pmod{n}$.
2. Докажите, что если натуральные числа n и m взаимно просты, то $(2^n - 1)$ и $(2^m - 1)$ также взаимно просты.
3. Пусть p — нечетное простое число и $p \mid (a - 1)$. Докажите, что $p^2 \mid (a^n - 1)$ тогда и только тогда, когда $p \mid n$.
4. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n таких, что $n \mid 2^n + 1$.
5. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что $(2^n - 1)$ делится на $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда n делится на $m \cdot (2^m - 1)$.
6. Найдите все числа, взаимно простые с числом $2^n + 3^n + 6^n - 1$ для любого n.
7. Решите уравнение $3^k + 4^l = 5^n$ в натуральных числах.
8. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, а $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, m, n.
9. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если $n > 1$ нечетное, а p нечетное простое, то n является степенью числа p.
10. Докажите, что ни для какого простого p и $n > 1$ уравнение $2^p + 3^p = a^n$ не имеет натуральных решений.
11. Решите уравнение в натуральных числах: $3^k = x^n + 1$.

Уравнения в целых числах. Разложение на множители. Поиск простых делителей

Решите уравнения в целых числах, если не указано иное.

1. $xy + x + y = 23$.

2. $2xy + 3x + y = 11$.

3. $(x + y)^2 = x^3 + y^3$.

4. $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

5. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

6. Найдите все такие натуральные k, m, n, что $k^4 + 2^n = 5^m$.

7. **(a)** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^{2014}$.
(b*) Существует ли число, представимое в виде суммы четырех квадратов более чем миллионом способов?

8. Решите в натуральных числах: **(a)** $x^y = y^x$; **(b)** $x^y = y^{x+y}$.

Многочлены

1. Докажите, что график любого кубического четырехчлена имеет центр симметрии.

2. При каких a и b корни многочлена $x^3 + ax + b$ образуют арифметическую прогрессию?

3. Вася нарисовал на листе бумаги график многочлена 3-й степени, а потом выделил полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными Ox. В полосе оказались три куска графика. Докажите, что проекция одного из этих кусков на ось Ox равна сумме проекций двух других кусков.

4. Длины сторон треугольника являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что длины высот треугольника являются корнями уравнения шестой степени с рациональными коэффициентами.

5. Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

Многочлены и теория чисел

6. Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 5$ и $P(31) = 6$?

7. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$P(2000) = 2001,\ \ P(2015) = 2015.$$

Докажите, что $P(n)$ нечетно при целых n.

8. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $P(1) = 2015$, $P(2015) = 1$, а $P(k) = k$. Найдите k.

9. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами при трех различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня.

10. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

11. **(a)** Докажите, что наибольший общий делитель чисел $(n-1)$ и $(n^4+n^3+n^2+n+1)$ равен 1 или 5.
(b) Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты как многочлены. Докажите, что существует такое натуральное M, что наибольший общий делитель чисел $P(n)$ и $Q(n)$ делит M.

Внезапный многочлен

12. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

Некоторые классические неравенства

1. Докажите, что для положительного x выполнено неравенство

$$2x + \frac{3}{8} \geqslant \sqrt[4]{x}\,.$$

2. Докажите, что для положительных x, y выполнено неравенство

$$x^4 + y^4 + 8 \geqslant 8xy\,.$$

3. Для положительных x, y, z докажите, что

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z\,.$$

4. Для положительных a, b, c докажите, что

(a) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + b^2a$;

(b) $a^6 + b^6 + c^6 \geqslant a^3b^2c + a^2bc^3 + ab^3c^2$.

5. Для положительных a, b, c докажите, что $(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$.

Заменяем суммы на переменную и наоборот

6. Для положительных a, b, c докажите, что

$$abc \geqslant (a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)\,.$$

7. Для положительных x, y, z докажите, что

$$\frac{4x}{z+y} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} > 2\,.$$

8. Стороны некоторого треугольника равны a, b, c. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3\,.$$

9. Докажите **неравенство Бернулли:** $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ для натуральных n и $\alpha > -1$.

10. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 \geqslant 3$.

Задачи на построения и геометрические места точек, связанные с площадями

1. Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих внутри треугольника ABC, что $S_{ACM} + S_{BCM} = S_{ABM}$.

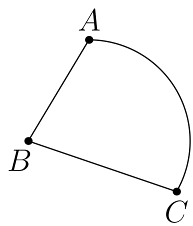
2. Через точку, лежащую на стороне треугольника, проведите прямую, разбивающую данный треугольник на две равновеликие части.

3. Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих в плоскости треугольника ABC, что:
(a) $S_{ACM} = S_{BCM}$; **(b)** $S_{ACM} = S_{BCM} = S_{ABM}$.

4. Внутри данного треугольника ABC постройте точку M так, чтобы $S_{AMB} : S_{BMC} : S_{CMA} = 3 : 2 : 1$.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ дана точка P. На границе параллелограмма постройте точку Q так, чтобы ломаная APQ разбивала его на две равновеликие части.

6. **(a)** Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ укажите какую-нибудь точку M так, чтобы ломаная AMC разбивала его на две равновеликие части.
(b) Через вершину выпуклого четырехугольника проведите прямую, разбивающую его на две равновеликие части.
(c) Выпуклая фигура ограничена углом ABC и дугой AC (рис. справа). Постройте какую-нибудь прямую, разбивающую ее на две равновеликие части.



7. **(a)** Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC найдите множество точек M таких, что $S_{ADM} + S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.
(b) Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите множество точек M таких, что $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ADM} + S_{BCM}$.

8. **(a)** Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр его вписанной окружности.
(b) Объясните, как построить такую прямую.

9. Некоторая кривая Γ делит квадрат на две части равной площади. Всегда ли найдутся такие две точки A и B на этой кривой, что прямая AB проходит через центр O квадрата?

10. В произвольном треугольнике ABC точка D — середина стороны AB. Можно ли так расположить точки E и F на сторонах AC и BC соответственно, чтобы площадь треугольника DEF оказалась больше суммы площадей треугольников AED и BFD?

Теорема и неравенство Птолемея

1. *Задача Птолемея.* В треугольнике ABC: $|BC| = a$, $|AC| = b$. Найдите $|AB|$, если радиус окружности, описанной около ABC, равен R.

2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке W.

(a) Выразите отношение $|AW| : |IW|$ через длины сторон треугольника (I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC).

(b) Докажите, что $|AW| > \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$.

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат, O — его центр. Найдите $|OC|$, если a и b — катеты треугольника.

4. *(Теорема Помпею́)* Точка M лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC.

(a) Докажите, что сумма расстояний от M до двух вершин треугольника равна расстоянию от M до третьей вершины.

(b) Укажите все такие точки X плоскости, что из отрезков XA, XB и XC можно составить треугольник.

5. Сумма расстояний от точки X, выбранной вне квадрата, до двух его ближайших соседних вершин равна m. Найдите наибольшее значение суммы расстояний от X до двух других вершин квадрата.

6. **(a)** Точки A, B, C и D — четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что
$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}\ .$$

(b) Докажите, что
$$\frac{1}{\sin(\pi/7)} = \frac{1}{\sin(2\pi/7)} + \frac{1}{\sin(3\pi/7)}\ .$$

7. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = |DE| = b$, $|EF| = |FA| = c$. Докажите, что
$$\frac{a}{|BE|} + \frac{b}{|AD|} + \frac{c}{|CF|} \geqslant \frac{3}{2}\ .$$

8. Объясните, как построить четырехугольник $ABCD$ если даны его стороны и известно, что он вписанный.

9. В остроугольном треугольнике ABC обозначим d_1, d_2 и d_3 — расстояния от центра O описанной окружности до сторон. Докажите, что $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника.

Формула Карно

Если это не оговорено отдельно, то треугольник, заданный в условии, — остроугольный, r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей соответственно, p — полупериметр.

1. **(a)** Докажите, что сумма расстояний от вершин треугольника до ортоцентра равна сумме диаметров его вписанной и описанной окружностей.
(b) Верно ли это утверждение, если треугольник — тупоугольный?

2. Докажите, что в треугольнике ABC выполняются неравенства:

$$\textbf{(a)}\quad \frac{AH+BH+CH}{3} \leqslant R\,; \qquad \textbf{(b)}\quad OH \geqslant \frac{R-2r}{3}\,;$$

(H — ортоцентр, O — центр описанной окружности).

3. **(a)** Докажите, что

$$m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{9}{2}\cdot R\,,$$

где m_a, m_b и m_c — длины медиан треугольника.
(b) Пусть в треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность в точках W_1, W_2 и W_3 соответственно. Докажите, что

$$AW_1 + BW_2 + CW_3 \leqslant 6{,}5R - r\,.$$

4. **(a)** Докажите, что для углов α, β и γ треугольника выполняется неравенство:

$$\frac{3r}{R} \leqslant \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leqslant \frac{3}{2}\,.$$

(b) Пусть AH_A, BH_B и CH_C — высоты треугольника ABC, H — его ортоцентр. Найдите сумму диаметров окружностей, описанных около треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B, если даны R и r.

5. В окружность радиуса R вписан треугольник, а в каждый сегмент, ограниченный стороной треугольника и меньшей из дуг окружности, вписана окружность наибольшего радиуса. Найдите сумму диаметров трех получившихся окружностей и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

6. **(a)** Докажите, что в треугольнике ABC выполняется равенство:

$$a\cdot(OM_B + OM_C) + b\cdot(OM_C + OM_A) + c\cdot(OM_A + OM_B) = 2pR\,,$$

где M_A, M_B, M_C — середины соответствующих сторон.
(b) *(Неравенство Эрдёша)* Пусть h_a — наибольшая высота треугольника ABC. Докажите, что $h_a \geqslant R + r$.

7. **(a)** Запишите формулу Карно для случаев прямоугольного и тупоугольного треугольников и обоснуйте.

(b) Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC, а r_3 и r_4 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD. Докажите, что $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

8. Пусть d, d_1, d_2 и d_3 — расстояния от центра O окружности, описанной около треугольника, до центров его вписанной и вневписанных окружностей. Докажите, что

$$R^2 = \frac{d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{12} .$$

9. **(a)** Докажите, что если точка принадлежит отрезку, соединяющему основания двух биссектрис треугольника, то сумма расстояний от этой точки до двух сторон треугольника равна расстоянию от нее до третьей стороны.

(b) Пусть центр O окружности, описанной около треугольника, лежит на отрезке, соединяющем основания двух биссектрис. Докажите, что расстояние от ортоцентра треугольника до одной из его вершин равно $R + r$.

Геометрические места точек

1. На плоскости даны две точки A и B. Кроме того, дано число $a > 0$. Докажите, что геометрическое место точек X таких, что $AX^2 - BX^2 = a$, является прямой, перпендикулярной AB.

2. На плоскости дан треугольник ABC. Рассмотрим геометрическое место точек плоскости X, для которых $AX/BX = AC/BC$.

(a) Укажите четыре различных точки на плоскости, принадлежащих этому ГМТ.

(b) Найдите это геометрическое место точек.

3. Дана окружность ω и точки A и B на ней. Точка C движется по окружности ω. Какую траекторию описывает

(a) ортоцентр H треугольника ABC?

(b) точка пересечения медиан треугольника ABC?

(c) центр вписанной окружности I?

(d) центр вневписанной окружности I_c?

(e) центр вневписанной окружности I_a?

4. Даны две равные окружности, пересекающиеся в точках A и B. Через точку A проводится прямая ℓ, пересекающая вторично первую окружность в точке X, а вторую в точке Y. Найдите геометрическое место середин отрезков XY, когда прямая ℓ меняется.

5. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на контуре треугольника ABC.

6. Дан прямой угол с вершиной O. Найдите геометрическое место середин отрезков единичной длины с концами на сторонах угла.

Степени точки и радикальные оси

1. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке M.
(a) Докажите, что M лежит на медиане треугольника, выходящей из вершины B.
(b) Докажите, что A, C, M и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

2. Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке K. Докажите, что прямая HK перпендикулярна медиане треугольника ABC из вершины B.

3. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

4. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

5. Пусть точки B_1 и C_1 — середины касательных AB и AC, проведенных из точки A к окружности S. На прямой B_1C_1 выбрана точка F. Докажите, что длина касательной из точки F к окружности S равна длине отрезка AF.

6. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ, а также медиана CM. Точка R — середина CM. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. Докажите, что $OR \perp TC$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Разнобой, повторение (геометрия)

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что
(a) $H_AH_B = AB$; **(b)** $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

3. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведены касательная AK к его описанной окружности, а также биссектрисы AN и AM внутреннего и внешнего углов при вершине A (точки M, K и N лежат на прямой BC). Докажите, что $MK = KN$.

4. Из точки P проведены касательные PA и PB к окружности ω. Точка M — середина хорды AB. Прямая, проходящая через M, пересекает окружность в точках C и D. Докажите, что PM — биссектриса угла CPD.

5. Четырехугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая — хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

6. Из некоторой точки D в плоскости треугольника ABC провели прямые, перпендикулярные к отрезкам DA, DB, DC, которые пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

7. Серединный перпендикуляр к диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает прямые AD и CD в точках P и Q. Докажите, что биссектрисы углов ABC и PBQ совпадают.

Дополнительная окружность

1. На плоскости даны прямая ℓ и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой ℓ выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

2. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

4. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, отличной от B. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что угол BKO — прямой.

5. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

7. На сторонах AP и PD остроугольного треугольника APD выбраны соответственно точки B и C. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. Точки H_1 и H_2 являются ортоцентрами треугольников APD и BPC соответственно. Докажите, что если прямая H_1H_2 проходит через точку X пересечения описанных окружностей треугольников ABQ и CDQ, то она проходит и через точку Y пересечения описанных окружностей треугольников BQC и AQD.

Перевод на другой язык (изоморфизм)

How much is five plus seven?

Задача, переведенная на другой язык, может оказаться гораздо легче. Не забудьте только перевести решение обратно!

1. **(a)** На пустой шахматной доске двое играющих по очереди двигают коня. Двигать можно только влево-вниз. Кто не сможет сделать ход — проиграл. Найдите все клетки, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.
(b) В двух коробочках лежат орехи, в каждой не более семи. Играют двое. За один ход нужно взять три ореха — два из одной коробочки, третий — из другой. Найдите все позиции, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.

Геометрические задачи можно перевести в алгебраические, введя координаты. Но с помощью координат можно и алгебраические задачи решать на геометрическом языке!

2. Сколько решений может быть у системы уравнений при различных значениях параметров a, b, c, d, r, R?

3. По прямой в одном направлении на некоторых расстояниях (возможно, разных) друг от друга движутся 20 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 20 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

Переводят обычно на знакомый язык, где начинает работать интуиция!

4. **(a)** Капитаны Боб и Иван состязаются в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб сделал коктейль из рома и портвейна, а Иван смешал водку с брагой. Известно, что ром крепче водки, а портвейн крепче браги. Наутро Ивану было много хуже. Он подозревает, что его смесь оказалась крепче коктейля Боба. Обоснованы ли подозрения? (Крепость — это процент алкоголя в смеси.)
(b) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

5. Следующая игра является переводом на другой язык одной очень популярной игры. Какой?

> На столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым после своего хода сможет выложить три карточки с суммой 15.

Переводят для того, чтобы обойти препятствие: так, туристы, идущие вдоль берега и натолкнувшиеся на скалы, могут обойти их, временно переправившись на другой берег.

6. **(a)** Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части и части и разложить части каждой плитки в две разные кучки так, чтобы из всех частей каждой кучки можно было сложить квадрат.
(b) Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Верно ли, что можно так разрезать каждую плитку на две части и разложить части каждой плитки в две разные кучки, чтобы из N частей одной кучки можно было сложить квадрат, а из N частей другой кучки — прямоугольник?

7. **(a)** На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/99$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на отношение их произведения к их сумме. После нескольких операций осталось одно число. Какое?
(b) Тот же вопрос для чисел $1, 2, 4, 8, \dots, 1024$.
(c) Тот же вопрос для чисел $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \dots,\ n \cdot (n+1)$.

Домашнее задание

1. Докажите неравенство

$$\sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\,.$$

2. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \leqslant y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами x и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

3. На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/99$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на $ab + b + a$. После 98 операций осталось одно число. Какое?

4. В противоположных углах шахматной доски стоят белая и черная фишки. Ходят по очереди на соседнюю по стороне клетку, начинают белые. Белые стремятся получить прямоугольный треугольник с вершинами в центре доски и центрах клеток с фишками. Могут ли черные им помешать?

Жадный алгоритм

Это жадность-то до добра не доводит?!!!

Алгоритм — это способ достижения цели через жестко определенную последовательность шагов. Когда в ответе надо предъявить алгоритм, естественно рассматривать его как составную конструкцию. Типичные примеры: выигрышная или ничейная стратегия в играх. Кроме того, алгоритмы регулярно возникают в задачах на испытания. Если цель — максимум какой-то величины, то ее часто достигают с помощью «жадного алгоритма», то есть, добиваясь максимально возможного приращения на каждом шаге.

1. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

2. На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается получить как можно больше сыра по весу. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Бывает полезно ввести вспомогательную величину для оптимизации.

3. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?

Экономные действия позволяют строить примеры проще

4. На плоскости нарисован черный равносторонний треугольник. Имеется десять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного треугольника (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

Отклонение от жадности

Часто можно показать, что жадный алгоритм не достигает результата. Доказав недостижимость, подумайте, нельзя ли из этого извлечь указания, и достичь результата, следующего за жадным.

5. $ABCD$ — квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C?

6. В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?

7. **(a)** На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые — вверху?
   (b) То же для доски 9×9.

8. На столе лежат в ряд 300 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

Домашнее задание

1. На блюде лежат 15 кусков сыра двух весов. Сначала Вася может разрезать некоторые из этих кусков (но не все) каждый на две части так, чтобы в результате снова получились куски двух весов. Затем Петя берет себе один из кусков, потом Вася — один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т. д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

3. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2012$. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может это делать в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел всегда была составным числом.

4. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а на последней — 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход.

5. На столе лежат в ряд 2014 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

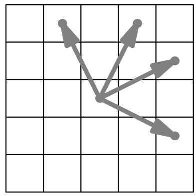
6. **(a)** 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или нескольку карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Каков будет результат игры при правильной игре сторон?
   (b) Тот же вопрос при $N!$ карточек, выигрывает тот, у кого первого произведение разделится на $N!$.

Полуинвариант

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант — это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели.

1. На Архипелаге Сыщик гоняется за Шпионом. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

Оценив изменение полуинварианта на одном шаге или на группе шагов, можно оценить, за сколько шагов процесс закончится.



2. **(a)** На шахматной доске 100×100 коню разрешено ходить только в четырех направлениях (рис. справа). Докажите, что с какой бы клетки он ни начал, ему удастся сделать лишь конечное число ходов.
(b) Какое наибольшее число ходов конь может сделать на этой доске?

Типичные полуинварианты: сумма, произведение, модуль разности, сумма модулей, сумма квадратов и их комбинации (например, суммы).

3. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.

4. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.

Для строки целых чисел (или объектов) полуинвариантом может быть многозначное число в некоторой системе счисления.

5. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую.
(a) Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.
(b) Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

6. **(a)** В строке записаны 100 цифр. Петя находит пару рядом стоящих цифр, где правая меньше левой, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно перестановки прекратятся.

(b) В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, \dots, 100$. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2, \dots, 100$.

Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может зациклиться). В большинстве игр наличие полуинварианта гарантирует, что игра закончится.

7. Есть 10 различных чисел. За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой.

(a) Может ли процесс продолжаться бесконечно?

(b) Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?

Если полуинвариант может принимать лишь конечное число значений, или убывает, принимая лишь натуральные значения, то он достигнет «крайнего» значения. Это может обеспечить искомую позицию.

8. **(a)** В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается поменять в нем все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время во всех таких прямоугольниках плюсов будет больше чем минусов.

(b) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток сумма отрицательна, разрешается поменять в нем знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из таких прямоугольников сумма будет неотрицательной.

(c) Как в предыдущем пункте, но числа — действительные.

Домашнее задание

1. Есть 10 различных целых чисел (не обязательно положительных). За одну операцию можно два не равных числа одинаковой четности заменить на два равных с той же суммой. Может ли процесс продолжаться бесконечно?

2. Вначале на доске было написано натуральное число, меньшее 1000. Каждым ходом число увеличивали в q раз.

(a) После каждого из первых 9 ходов получалось целое число. Верно ли, что и дальше будут получаться только целые числа?

(b) То же, но целые числа получались после каждого из первых 10 ходов?

3. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. Вначале было больше 100 орехов. Докажите, что хотя бы один орех будет съеден.

4. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

Переправы и инварианты

Сколь ни вдоль, а поперек изволь. *Поговорка*

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории (два берега, два цвета), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться.

1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что есть точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

2. Можно ли на всех полях шахматной доски расставить коней четырех мастей так, чтобы вороные не били соловых, соловые — гнедых, гнедые — каурых, а каурые — вороных?

Вместо цветов используют значения какой-нибудь величины, например, остатки. Переправа может оказаться ключевым местом решения: надо только суметь привязать к ней вопрос задачи.

3. **(a)** Можно ли расставить в таблице 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 4?
(b) Можно ли расставить в таблице 8×8 различные двузначные числа так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 3?

4. Натуральные числа раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что найдутся синяя и красная пара с одинаковыми суммами.

Типичная ситуация: есть набор позиций (состояний) и переходы между ними. Это можно рассматривать как граф. Пусть с каждой позицией можно связать некоторую величину. Если величина при переходах не меняется, она — инвариант. Значения инварианта разбивают граф на компоненты связности, и нет маршрута между позиций с разными значениями инварианта. Соответственно, можно доказывать невозможность действия: например, нельзя доехать на поезде от Нью-Йорка до Москвы, поскольку поезда из Америки ходят только в Америку. Но можно доказать и существование: если добраться таки удалось, то был либо перелет, либо плавание.

Типичные инварианты: четность, общий делитель, сумма.

5. В банке 1100 долларов. Разрешаются две операции: взять из банки 370 долларов или положить в нее 111 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банки и как это сделать?

6. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

7. Клетчатый квадрат 2015×2015 разрезали по границам клеток на прямоугольники (не обязательно одинаковые). Докажите, что найдется прямоугольник, чей периметр делится на 4.

Нечисловые инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством.

8. Картонный треугольник катают по плоскости, перекатывая через сторону. После 2015 перекатываний он попал в точности на исходное место. Докажите, что треугольник равнобедренный.

9. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычная шахматная ладья. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на черную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

Домашнее задание

1. Натуральные числа от 1 до 2015 покрашены в красный и синий цвета. Есть пара красных и пара синих чисел с одинаковыми произведениями. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами.

4а. Три ладьи стояли на клетках a1, b1 и a2. За несколько ходов они перешли в клетки у противоположного угла доски: с a1 — на h8, с b1 — на h7, с a2 — на g8. Докажите, что после какого-то из ходов какая-то из ладей не била других ладей.

2. По шахматной доске прокатили кубик. Он встал той же гранью на ту же клетку. Может ли кубик оказаться повернутым на 90° вокруг вертикальной оси?

3. *(Сдать письменно 2 или 3 апреля.)* Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — N л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. При каких целых N можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

Дискретная непрерывность и разрывы

Если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием — дискретной непрерывностью…

1. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

2. **(a)** В баскетбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Команды в сумме набрали более 100 очков. Верно ли, что в какой то момент счет был ничейный? (Попадание в корзину «с игры» приносит команде 2 или 3 очка)
(b) В футбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Докажите, что в какой то момент счет был ничейный.

3. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Полезно раскрасить объекты в два цвета так, чтобы граница или разрыв отделяли цвета.

4. В последовательности целых чисел каждое число, начиная со второго, на 1 больше предыдущего или в 3 раза меньше предыдущего. Первое число равно 1, последнее равно 100. Докажите, что среди чисел есть и 77.

5. В ряд лежат 100 яблок, соседние отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что если выложить яблоки в ряд по возрастанию веса, то и тогда соседние будут отличаться не более чем на 10 г.

Если процесса нет, организуй сам. Подбери начало и конец процесса так, чтобы они были по разные стороны от нужного значения.

6. В ряд сидит 15 мальчиков и 15 девочек.
(a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

7. **(a)** По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(b) По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 18 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

В некоторых процессах полезно начало и конец поменять местами. Тут помогает расположение на окружности.

8. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек.

(a) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две части, в одной из которых будет 300 шашек.

(b) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек.

Домашнее задание

1. В стране Ш. человек считается *богатым,* если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Все зарплаты в стране различные. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.

2. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см.

(a) В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.

(b) Докажите, что если солдаты встанут по росту, то по-прежнему рост соседей будет отличаться не более, чем на 2,4 см.

3. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах.

4. В одном из 100 окопов, расположенных в ряд, спрятался робот-пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами робот (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный).

(a) Известно, что вначале слева от робота — нечетное число пустых окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?

(b) Вначале робот может быть в любом из окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?

Неоднозначные данные

«А это вам знать пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников все-таки увидели то, что знать пока рано?

Неразличимые примеры

Чтобы доказать, что информации недостаточно для получения однозначного ответа, можно построить два примера, которые удовлетворяют всем условиям, но дают разные ответы.

1. В ряд выписаны 100 чисел, первое равно 3, а сумма любых трех подряд равна 100. Можно ли наверняка узнать, чему равно
(a) 100-е число? **(b)** 50-е число?

2. **(a)** Незнайка утверждает, что он может узнать с помощью чашечных весов без гирь, есть ли среди любых трех камней такой, вес которого равен 1/3 общего веса. Не хвастает ли он?
(b) А узнать, есть ли среди десяти камней камень веса 1/10 от общего веса?

3. У Кащея есть куб, в каждой вершине которого вставлено по алмазу. Известны веса этих алмазов: 1 карат, 2 карата, …, 8 карат. Кащей предлагает Ивану Царевичу такую игру: он сообщает Ивану сумму весов алмазов на каждом ребре. Если после этого Иван правильно назовет, куда какой по весу алмаз вставлен, то получит этот куб вместе с алмазами, а если хотя бы в одном месте ошибется, то распрощается с головой. Стоит ли Ивану соглашаться играть?

Примеры «задним числом»

Неразличимые примеры и контрпримеры могут строится после того, как испытания уже проведены и ответы даны, с использованием уже полученной информации. Этот метод часто применяется, чтобы опровергнуть предположение о наличие «гарантированного» алгоритма.

4. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка P внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать
(a) за два вопроса? **(b)** за три вопроса?

5. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

6. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)
(a) Суд уже установил, что фальшивых монет 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?
(b) Суд уже установил, что фальшивых монет 0 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?

Домашнее задание

1. *Письменная задача.* В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Всегда ли по этой информации можно узнать пару крайних карт колоды?

2. **(a)** В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?
(b) То же для доски 9×9 и чисел от 1 до 81.

3. У N ключей от N гостиничных номеров потерялись бирки. Известно, что каждый ключ открывает ровно один из номеров. Какое наименьшее число пробных открываний дверей надо сделать, чтобы наверняка определить, от какого номера каждый ключ?

Принцип крайнего

Идея 1. Обратите внимание на объекты «с краю», где край понимается геометрически (граница, вершина, угол) или арифметически (наибольшее, наименьшее). Можно рассматривать и несколько крайних объектов. Так, для получения оценки бывает полезным выбрать два крайних объекта: для разностей — наибольший и наименьший, для расстояний — наиболее удаленные друг от друга.

1. На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.

2. В порядке возрастания длин лежат несколько палочек. Можно взять любые три и проверить, складывается ли из них треугольник. За какое наименьшее число проверок можно доказать или опровергнуть утверждение о том, что из любой тройки палочек складывается треугольник?

Критический момент часто случается в конце процесса.

3. Петя разложил 10 фруктов на две чаши весов. Далее он 7 раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Могли ли весы быть в равновесии вначале и после каждой операции?

Идея 2. *Минимальный контрпример.* Условие минимальности облегчает поиск (или построение) контрпримера, а доказав, что нет минимального, мы докажем и отсутствие контрпримеров вообще. В частности, полезно сократить на общий делитель.

4. Пусть $x^3 + x = 5$. Докажите, что x — иррационально.

Домашнее задание

1. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы все 100 читателей его услышали.

2. Числа p и q — целые, $x^2 + px + q > 0$ при всех целых x. Докажите, что $x^2 + px + q > 0$ и при всех нецелых x.

3. Пусть a, b, c — натуральные числа. Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a + c, b + c)$ быть равны?

Индукция

Математическая индукция помогает коротко записать строгое решения, но не объясняет, как его придумать, и в чем его смысл.

Индуктивное построение

Наиболее оправдано применение индукции при построении сложных конструкций, когда очередной этаж строится на основе уже построенных нижних этажей. Такое построение может быть при необходимости преобразовано в явный алгоритм.

1. От прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что для любого n найдется прямоугольник, для которого процесс закончится ровно после n-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера.

2. В компании из n человек ($n \geqslant 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $(2n - 4)$ звонка все смогут узнать все новости?

Рекурсия

Редукция сводит решение задачи к более простой. Пусть удается свести к такой же задаче с меньшим значением полуинварианта. Если полуинвариант не может уменьшаться бесконечно, а для его крайних значений задача решена, то это — *рекурсия.* Такую *цепочку редукций* тоже оформляют как индукцию, объявляя полуинвариант параметром индукции.

3. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?

Индукция незаменима при логической рекурсии («иль думал, что я думала, что думал он я сплю»).

4. 10 бандитов ограбили банк на миллион долларов и уселись в ряд за стол делить деньги. Сначала первый предлагает, кому сколько: мне столько-то, второму столько-то и т. д., и все 10 голосуют. Если «за» не менее половины, то предложение принимается, каждый получает предложенную долю, и все расходятся. Если более половины голосуют «против», первого убивают, и тогда уже второй бандит предлагает кому сколько на тех же условиях, и т. д. Каждый бандит руководствуется в первую очередь желанием выжить, во вторую (если жизнь вне опасности) — получить побольше денег, в третью (если на жизнь и сумму это не влияет) — не убивать без необходимости (дело-то не последнее!). Как распределятся деньги, если все бандиты будут действовать и рассуждать абсолютно логически?

Дополнительные задачи

1. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

2. Есть гири с номерами от 1 до n, для каждого k вес k-й гирьки целый и не превосходит k, а сумма всех весов четна. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

3. В вершинах связного графа с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $(n-1)$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

Увидеть граф

Позиции и ходы

1. **(a)** На прямой сидят два кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?
(b) То же, но кузнечиков не два, а три.

2. **(a)** На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 2015 ходов?
(b) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 2015 ходов?

Сумма степеней вершин

Факт 1. Сумма степеней вершин графа вдвое больше числа его ребер.

Факт 2. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

3. Можно ли расположить 7 карандашей так, чтобы каждый касался ровно трех других?

4. В пустые клетки доски 5×5 Петя по одному вписывал числа. Вписанное число равнялось количеству соседних по стороне клеток, в которые уже был вписаны числа. Петя заполнил всю доску. Найдите сумму все чисел и докажите, что она не зависит от порядка заполнения.

5. В однокруговом турнире участвовали 15 команд. Докажите, что хотя бы в одной игре встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечетном числе игр этого турнира.

Чередование и обходы

Определение. Граф — *двудольный,* если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. Пример: любое дерево.

6. Докажите, что следующие графы — двудольные:
(a) Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
(b) То же, что в предыдущем пункте, но для n фишек.

7. Пусть Γ — двудольный граф с черными и белыми вершинами. Докажите, что
(a) Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
(b) Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.

8. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

9. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке.

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

Домашнее задание

1. На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка — единственная.

2. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

3. **(a)** Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?
(b) В кубике Рубика $3 \times 3 \times 3$ отмечены вершины клеток, середины сторон клеток и центры клеток. Центры клеток соединены отрезками с серединами сторон клеток. Можно ли по проведенным отрезкам и сторонам клеток обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

4. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

Свяжитесь с графом

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе B — число вершин, P — число ребер, C — число компонент связности.

Факт 1.
(a) В дереве (то есть связном графе без циклов) $B = P + 1$.
(b) В графе без циклов $B = P + C$.

Факт 2.
(a) В связном графе $P \geqslant B - 1$.
(b) В любом графе $P \geqslant B - C$.

1. Какое наибольшее число ребер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?

2. Дан связный граф, где вершин не меньше, чем ребер. Докажите, что можно удалить ребро так, чтобы граф остался связным.

3. В многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Стороны и провёденные диагонали раскрасили в желтый и красный цвета так, что жук может проползти из любой вершины в любую другую по желтым отрезкам. Докажите, что есть две вершины, между которыми клоп не может проползти по красным отрезкам.

4. Из спичек сложена шахматная доска. Жук через спичку не ползает. Убрав часть спичек внутри доски, получаем *лабиринт.* Назовем его *связным,* если жук может проползти между любыми двумя клетками. Каких лабиринтов можно получить больше: связных или не связных?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для B, P, C, можно получать нетривиальные оценки.

5. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

6. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется *хорошей,* если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

7. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

8. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идет по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

9. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

Домашнее задание

1. Куб со стороной $n \geqslant 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

2. На клетчатой бумаге по границам клеток обведен тысячеугольник. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?

3. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

4. Есть 100 камней разного веса. За одно взвешивание можно про любые два камня узнать, который из них тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка определить самый тяжёлый камень?

Глава 2

Чёрные Ферзи (9-1)

Тренировочная олимпиада — 1

1. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Числа $2x$, $4x$ и $5x$ оказались не целыми и не полуцелыми. Он округлил каждое из этих трех чисел до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите x.

А. Шаповалов

2. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель на 50 больше квадрата самого маленького собственного делителя. (*Собственными* называются все натуральные делители числа кроме него самого и единицы).

А. Шаповалов, по мотивам задачи олимпиады им. Кукина

3. Можно ли на доску 2015×2015 выставить несколько ладей так, что каждое пустое поле и каждая ладья была побита одинаковым числом ладей? (Ладья бьет поле или другую ладью на той же вертикали или горизонтали если между ними нет других фигур. Ладья себя не бьет.)

А. Шаповалов

4. Внутри треугольника отмечена точка. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин треугольника не превосходит суммы двух наибольших сторон.

Н. Седракян, 3-я Устная олимпиада по геометрии, 2005 г.

Тренировочная олимпиада — 2

1. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Этот квадратный трехчлен имеет два корня, причем ровно один из них лежит в интервале от 0 до 1. Докажите, что $f(q) < 0$.

2. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

3. На плоскости отмечены 125 точек. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть 11-ю прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть 11-ю прямыми.

4. Чему равна сумма всевозможных произведений четного количества дробей
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}\ ?$$
(В каждом произведении все дроби различны.)

Прыжки по кругу

1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α.
(a) При каких α он сможет побывать лишь в конечном числе точек окружности?
(b) Докажите, что не позже чем через 1000 секунд он окажется на расстоянии меньше чем $1/1000$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).
(c) При каких α кузнечик сможет рано или поздно посетить любую дугу окружности?

2. Существует ли такое натуральное n, что $\operatorname{tg}(n) > 10000000$?

3. Кузнечик прошел курсы повышения квалификации и теперь он умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Теперь кузнечик готов прыгать по прямой. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.

4. Дано иррациональное число α.
(a) Докажите, что для любого натурального N существует такое ненулевое $-N < y \leqslant N$ такое, что $\{y\alpha\} < 1/N$.
(b) **Теорема Дирихле.** Докажите, что существует бесконечно много пар целых (x, y) таких, что

$$|x - y\alpha| < \frac{1}{y}.$$

Вновь вернемся к целым числам.

5. Дано простое число p.
(a) Обозначим $k = [\sqrt{p}\,]$. Назовем вычеты $-k, -k+1, \ldots 0, 1, 2, \ldots k$ по модулю p *маленькими*. Докажите, что для любого вычета a существует такой ненулевой маленький вычет b такой, что вычет ab тоже маленький.
(b) Пусть $p \mid a^2 + 1$. Докажите, что p представимо в виде суммы двух квадратов.
(c) Вспомните, что $a^2 + 1$ бывает кратно p тогда и только тогда, когда $p + 1$ не делится на 4.
(d) *Рождественская теорема Ферма или теорема Ферма-Эйлера о двух квадратах* Докажите, что число представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда каждое простое вида $4k + 3$ входит в его разложение в четной степени.

Для самостоятельного решения

6. Докажите, что функция $\sin(x) + \sin(\sqrt{2}\,x)$ непериодична.

7. Докажите, что существует степень двойки, которая начинается с числа 300.

8. Из начала координат выпустили луч. Докажите, что найдется ненулевая точка с целыми координатами, расстояние от которой до луча меньше 0,001.

9. Когда число представимо в виде $m^2 + 2n^2$?

Разнобой по алгебре и теории чисел

1. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p, q, что $m+n = p+q$ и $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 1000$?
(Заключительный этап-2004, 9.5)

2. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.
(Заключительный этап-2005, 9.5)

3. Докажите, что найдутся такие целые числа a, b, c, d, модули которых больше миллиона, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}\,.$$

(Заключительный этап-2006, 9.2)

4. Найдите все числа Фибоначчи, являющиеся степенями двойки или тройки.

5. Петя и Вася придумали десять квадратных трехчленов. После чего Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трехчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?
(Заключительный этап-2013, 9.6)

6. Обозначим за $S(x)$ сумму цифр числа x. Найдутся ли три таких натуральных числа a, b и c, что $S(a+b) < 5$, $S(a+c) < 5$ и $S(b+c) < 5$, но $S(a+b+c) > 50$?
(Заключительный этап-1998, 9.3)

7. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем $\frac{a_i^2}{a_i-1} > S$ для каждого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_1+a_3} > 1\,.$$

(Заключительный этап-2005, 9.3)

Большие степени

1. Известно, что $31 \mid a^{15} + b^{15} + b^{15} + d^{15} + e^{15}$. Докажите, что $31 \mid abcde$.
2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, делящих $2^n + 1$.
3. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что $(2^n - 1)$ делится на $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда n делится на $m \cdot (2^m - 1)$.
4. Найдите все числа, взаимно простые с числом $2^n + 3^n + 6^n - 1$ для любого n.
5. Решите уравнение $3^k + 4^l = 5^n$ в натуральных числах.
6. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, а $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, m, n.
7. Найдите все такие пары (a, b) натуральных чисел, что при любом n число $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$-ой степенью.
8. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если $n > 1$ нечетное, а p нечетное простое, то n является степенью числа p.
9. Докажите, что ни для какого простого p и $n > 1$ уравнение $2^p + 3^p = a^n$ не имеет натуральных решений.
10. Решите уравнение в натуральных числах: $3^k = x^n + 1$.

Уравнения в целых числах. Разложение на множители. Поиск простых делителей

Решите уравнения в целых числах, если не указано иное.

1. $xy + x + y = 23.$

2. $2xy + 3x + y = 11.$

3. $(x + y)^2 = x^3 + y^3.$

4. $x^3 + y^3 + 6xy = 8.$

5. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$

6. **(a)** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^{2014}.$
(b*) Существует ли число, представимое в виде суммы четырех квадратов более чем миллионом способов?

7. Найдите все такие натуральные k, m, n, что $k^4 + 2^n = 5^m$.

8. Решите в натуральных числах: **(a)** $x^y = y^x$; **(b)** $x^y = y^{x+y}$.

Многочлены

1. Докажите, что график любого кубического четырехчлена имеет центр симметрии.

2. **(a)** Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \geqslant 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось Ox. Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.
(b) Вася нарисовал на листе бумаги график многочлена 3-й степени, а потом выделил полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными Ox. В полосе оказались три куска графика. Докажите, что проекция одного из этих кусков на ось Ox равна сумме проекций двух других кусков.

3. Многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ таков, что $-2 \leqslant a + b + c \leqslant 0$. Известно, что у него три действительных корня. Докажите, что хотя бы один из корней принадлежит отрезку $[0; 2]$.

4. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне интервала — неотрицательны. Докажите, что найдется такое x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.

Многочлены и теория чисел

5. Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

6. Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(13) = 5$ и $P(31) = 6$?

7. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами при трех различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня.

8. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

9. **(a)** Пусть P, Q, R — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P = Q \cdot R$. Все коэффициенты P делятся на простое число p. Докажите, что у Q или у S все коэффициенты также делятся на p.
(b) Пусть $P = Q \cdot R$, все коэффициенты P целые, а все коэффициенты Q и S рациональные. Докажите, что найдется такое рациональное число r, что коэффициенты многочленов $Q \cdot r$ и R/r целые.

Внезапный многочлен

10. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

11. Докажите, что при $n > 6$ число $\cos(2\pi/n)$ иррационально.
Подсказка: воспользуйтесь комплексными числами и задачей 9.

Неравенства

Заменяем суммы на переменную и наоборот

1. Для положительных a, b, c докажите, что

$$abc \geqslant (a+b-c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)\,.$$

2. Для положительных x, y, z докажите, что

$$\frac{4x}{z+y}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} > 2\,.$$

3. Стороны некоторого треугольника равны a, b, c. Докажите, что

$$a^3+b^3+3abc > c^3\,.$$

Избавляемся от лишнего условия

4. **(a)** Докажите, что если $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, то найдутся такие $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $x_i = a_i/a_{i+1}$. (Считаем $a_{n+1} = a_1$.)
(b) Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geqslant n$$

и выведите отсюда *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:*

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\,.$$

5. Произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1+x_1\cdot x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2\cdot x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_n\cdot x_1} > 1\,.$$

Ещё один трюк

6. Докажите **неравенство Бернулли:** $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ для натуральных n и $\alpha > -1$.

7. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что $a^5+b^5+c^5 \geqslant 3$.

8. Сумма обратных величин к положительным числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна n. Докажите, что

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\ldots+\frac{x_n^n}{n} \geqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\,.$$

9. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1 ($n > 1$). Докажите, что

$$\frac{1}{1-\sqrt{x_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{1-\sqrt{x_n}} \geqslant n + 4\,.$$

Неравенства-2. Шевеления. Метод Штурма

Суть метода Штурма. Даны два положительных числа a, b. Будем их сближать, зафиксировав сумму. Как при этом будет вести себя
(a) произведение; **(b)** сумма квадратов; **(c)** сумма обратных величин;
(d) сумма корней; **(e)** сумма кубов?
Как будут вести себя эти величины, если сближать числа, зафиксировав какую-то другую из них?

Пример. Метод Штурма позволяет легко доказать *неравенства о средних*:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \geqslant \frac{n}{1/x_1+1/x_2+\ldots+1/x_n}\,.$$

1. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ равна 1. Докажите, что

$$(1+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot\ldots\cdot(n+x_n) \geqslant 2n!$$

2. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна $1/2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1}{1-x_1}+\frac{1+x_2}{1-x_2}+\ldots+\frac{1+x_n}{1-x_n} \leqslant 3\,.$$

3. Пусть $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}\,.$$

Надо что-то сделать с неоднородностью

4. Пусть положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c \geqslant abc$. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant abc\,.$$

5. Для положительных a, b, c, d выполнено $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd\,.$$

6. Для положительных a, b, c оказалось, что $3/(abc) \geqslant a+b+c$. Докажите, что

$$1/a+1/b+1/c \geqslant a+b+c\,.$$

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что

$$a+b+c \leqslant 3\,.$$

Задачи на построения и геометрические места точек, связанные с площадями

1. Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих внутри треугольника ABC, что $S_{ACM} + S_{BCM} = S_{ABM}$.

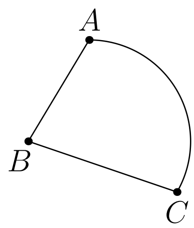
2. Через точку, лежащую на стороне треугольника, проведите прямую, разбивающую данный треугольник на две равновеликие части.

3. Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих в плоскости треугольника ABC, что:
(a) $S_{ACM} = S_{BCM}$; **(b)** $S_{ACM} = S_{BCM} = S_{ABM}$.

4. Внутри данного треугольника ABC постройте точку M так, чтобы $S_{AMB} : S_{BMC} : S_{CMA} = 3 : 2 : 1$.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ дана точка P. На границе параллелограмма постройте точку Q так, чтобы ломаная APQ разбивала его на две равновеликие части.

6. **(a)** Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ укажите какую-нибудь точку M так, чтобы ломаная AMC разбивала его на две равновеликие части.
(b) Через вершину выпуклого четырехугольника проведите прямую, разбивающую его на две равновеликие части.
(c) Выпуклая фигура ограничена углом ABC и дугой AC (рис. справа). Постройте какую-нибудь прямую, разбивающую ее на две равновеликие части.



7. **(a)** Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC найдите множество точек M таких, что $S_{ADM} + S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.
(b) Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите множество точек M таких, что $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ADM} + S_{BCM}$.

8. **(a)** Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр его вписанной окружности.
(b) Объясните, как построить такую прямую.

9. Некоторая кривая Γ делит квадрат на две части равной площади. Всегда ли найдутся такие две точки A и B на этой кривой, что прямая AB проходит через центр O квадрата?

10. В произвольном треугольнике ABC точка D — середина стороны AB. Можно ли так расположить точки E и F на сторонах AC и BC соответственно, чтобы площадь треугольника DEF оказалась больше суммы площадей треугольников AED и BFD?

Теорема и неравенство Птолемея

1. *Задача Птолемея.* В треугольнике ABC: $|BC| = a$, $|AC| = b$. Найдите $|AB|$, если радиус окружности, описанной около ABC, равен R.

2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке W.
(a) Выразите отношение $|AW| : |IW|$ через длины сторон треугольника (I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC).
(b) Докажите, что $|AW| > \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$.

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат, O — его центр. Найдите $|OC|$, если a и b — катеты треугольника.

4. *(Теорема Помпею́)* Точка M лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC.
(a) Докажите, что сумма расстояний от M до двух вершин треугольника равна расстоянию от M до третьей вершины.
(b) Укажите все такие точки X плоскости, что из отрезков XA, XB и XC можно составить треугольник.

5. Сумма расстояний от точки X, выбранной вне квадрата, до двух его ближайших соседних вершин равна m. Найдите наибольшее значение суммы расстояний от X до двух других вершин квадрата.

6. **(a)** Точки A, B, C и D — четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|} .$$

(b) Докажите, что

$$\frac{1}{\sin(\pi/7)} = \frac{1}{\sin(2\pi/7)} + \frac{1}{\sin(3\pi/7)} .$$

7. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = |DE| = b$, $|EF| = |FA| = c$. Докажите, что

$$\frac{a}{|BE|} + \frac{b}{|AD|} + \frac{c}{|CF|} \geqslant \frac{3}{2} .$$

8. Объясните, как построить четырехугольник $ABCD$ если даны его стороны и известно, что он вписанный.

9. В остроугольном треугольнике ABC обозначим d_1, d_2 и d_3 — расстояния от центра O описанной окружности до сторон. Докажите, что $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника.

Формула Карно

Если это не оговорено отдельно, то треугольник, заданный в условии, — остроугольный, r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей соответственно, p — полупериметр.

1. **(a)** Докажите, что сумма расстояний от вершин треугольника до ортоцентра равна сумме диаметров его вписанной и описанной окружностей.
(b) Верно ли это утверждение, если треугольник — тупоугольный?

2. Докажите, что в треугольнике ABC выполняются неравенства:

$$\textbf{(a)}\quad \frac{AH+BH+CH}{3} \leqslant R\,; \qquad \textbf{(b)}\quad OH \geqslant \frac{R-2r}{3}\,;$$

(H — ортоцентр, O — центр описанной окружности).

3. **(a)** Докажите, что

$$m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{9}{2}\cdot R\,,$$

где m_a, m_b и m_c — длины медиан треугольника.
(b) Пусть в треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность в точках W_1, W_2 и W_3 соответственно. Докажите, что

$$AW_1 + BW_2 + CW_3 \leqslant 6{,}5R - r\,.$$

4. **(a)** Докажите, что для углов α, β и γ треугольника выполняется неравенство:

$$\frac{3r}{R} \leqslant \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leqslant \frac{3}{2}\,.$$

(b) Пусть AH_A, BH_B и CH_C — высоты треугольника ABC, H — его ортоцентр. Найдите сумму диаметров окружностей, описанных около треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B, если даны R и r.

5. В окружность радиуса R вписан треугольник, а в каждый сегмент, ограниченный стороной треугольника и меньшей из дуг окружности, вписана окружность наибольшего радиуса. Найдите сумму диаметров трех получившихся окружностей и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

6. **(a)** Докажите, что в треугольнике ABC выполняется равенство:

$$a\cdot(OM_B + OM_C) + b\cdot(OM_C + OM_A) + c\cdot(OM_A + OM_B) = 2pR\,,$$

где M_A, M_B, M_C — середины соответствующих сторон.
(b) *(Неравенство Эрдёша)* Пусть h_a — наибольшая высота треугольника ABC. Докажите, что $h_a \geqslant R + r$.

7. **(a)** Запишите формулу Карно для случаев прямоугольного и тупоугольного треугольников и обоснуйте.

(b) Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC, а r_3 и r_4 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD. Докажите, что $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

8. Пусть d, d_1, d_2 и d_3 — расстояния от центра O окружности, описанной около треугольника, до центров его вписанной и вневписанных окружностей. Докажите, что

$$R^2 = \frac{d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{12} .$$

9. **(a)** Докажите, что если точка принадлежит отрезку, соединяющему основания двух биссектрис треугольника, то сумма расстояний от этой точки до двух сторон треугольника равна расстоянию от нее до третьей стороны.

(b) Пусть центр O окружности, описанной около треугольника, лежит на отрезке, соединяющем основания двух биссектрис. Докажите, что расстояние от ортоцентра треугольника до одной из его вершин равно $R + r$.

Ортоцентр

1. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке M.

(a) Докажите, что M лежит на медиане треугольника, выходящей из вершины B.

(b) Докажите, что A, C, M и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

2. **(a)** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(b) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника, выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

3. Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке K. Докажите, что прямая HK перпендикулярна медиане треугольника ABC из вершины B.

4. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1. Докажите, что H, O, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

5. Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой стороны AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

Отрезки

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B_1, C_1 — основания высот, опущенных из вершин B, C соответственно. Точка D — основание перпендикуляра из B_1 на AB, E — точка пересечения перпендикуляра, опущенного из из точки D на сторону BC, с отрезком BB_1. Докажите, что прямая EC_1 параллельна AC.

2. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AX/BX = CY/DY$.

3. AE и CD — высоты остроугольного треугольника ABC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DE в точке F. На отрезках AE и CD взяли такие точки P и Q соответственно, что четырехугольники $ADFQ$ и $CEFP$ — вписанные. Докажите, что $AP = CQ$.

4. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные l_1 и l_2. На l_1 между точками касания отметили точку A, а на l_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, а K — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K.

5. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка C_1 симметрична C относительно O, D — середина стороны AB, K — центр описанной окружности треугольника ODC_1. Докажите, что точка O делит пополам отрезок прямой OK, лежащий внутри угла ACB.

6. Точка K — середина чевианы AD треугольника ABC. Точка X на отрезке KC такая, что $\angle ABK = \angle XBC$. Оказалось, что $KX \cdot BD = CX \cdot CD$. Докажите, что $\angle BAX = \angle BCX$.

7. На сторонах треугольника взяли по две точки и соединили их с противоположными вершинами. Оказалось, что все 6 проведенных отрезков имеют равную длину. Докажите, что все их середины лежат на одной окружности.

Инцентры и вписанные окружности

1. Точка C движется по окружности с хордой AB с угловой скоростью ω. Докажите, что центр вписанной окружности I треугольника ABC движется по множеству, состоящему из объединения дуг двух окружностей. Какова угловая скорость точки I? Где расположены центры дуг? Опишите движение центров вневписанных окружностей.

2. **(a)** Точки I_A, I_B, I_C и I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.
(b) Как располагаются относительно друг друга 16 центров вписанных и вневписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC в случае, если четырехугольник $ABCD$ вписанный?
(c) Для каких $ABCD$ четырехугольник $I_AI_BI_CI_D$ является квадратом?

3. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что если вписанные окружности треугольников ABX и BCX касаются друг друга, то точка X лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка касания ее со стороной AC, B_1 — середина стороны AC. Докажите, что прямая B_1I делит отрезок BD пополам.

5. Через точки пересечения продолжений сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Докажите, что если четырехугольники, примыкающие к вершинам B и D, описанные, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный.

6. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC взята произвольная точка P. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABP и CBP. Докажите, что описанная окружность треугольника I_1I_2P проходит через некоторую фиксированную точку, не зависящую от выбора P.

7. Окружность с центром I касается сторон AB, BC, AC неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C, отличная от IA_1, проходит через точку A.

Дополнительная окружность

1. На плоскости даны прямая ℓ и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой ℓ выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

2. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

4. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, отличной от B. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что угол BKO — прямой.

5. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

7. На сторонах AP и PD остроугольного треугольника APD выбраны соответственно точки B и C. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. Точки H_1 и H_2 являются ортоцентрами треугольников APD и BPC соответственно. Докажите, что если прямая H_1H_2 проходит через точку X пересечения описанных окружностей треугольников ABQ и CDQ, то она проходит и через точку Y пересечения описанных окружностей треугольников BQC и AQD.

Перевод на другой язык (изоморфизм)

How much is five plus seven?

Задача, переведенная на другой язык, может оказаться гораздо легче. Не забудьте только перевести решение обратно!

1. **(a)** На пустой шахматной доске двое играющих по очереди двигают коня. Двигать можно только влево-вниз. Кто не сможет сделать ход — проиграл. Найдите все клетки, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.
(b) В двух коробочках лежат орехи, в каждой не более семи. Играют двое. За один ход нужно взять три ореха — два из одной коробочки, третий — из другой. Найдите все позиции, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.

Геометрические задачи можно перевести в алгебраические, введя координаты. Но с помощью координат можно и алгебраические задачи решать на геометрическом языке!

2. Сколько решений может быть у системы уравнений при различных значениях параметров a, b, c, d, r, R?

3. По прямой в одном направлении на некоторых расстояниях (возможно, разных) друг от друга движутся 20 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 20 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

Переводят обычно на знакомый язык, где начинает работать интуиция!

4. **(a)** Капитаны Боб и Иван состязаются в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб сделал коктейль из рома и портвейна, а Иван смешал водку с брагой. Известно, что ром крепче водки, а портвейн крепче браги. Наутро Ивану было много хуже. Он подозревает, что его смесь оказалась крепче коктейля Боба. Обоснованы ли подозрения? (Крепость — это процент алкоголя в смеси.)
(b) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

5. Следующая игра является переводом на другой язык одной очень популярной игры. Какой?

> На столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым после своего хода сможет выложить три карточки с суммой 15.

Переводят для того, чтобы обойти препятствие: так, туристы, идущие вдоль берега и натолкнувшиеся на скалы, могут обойти их, временно переправившись на другой берег.

6. **(a)** Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части и части и разложить части каждой плитки в две разные кучки так, чтобы из всех частей каждой кучки можно было сложить квадрат.
(b) Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Верно ли, что можно так разрезать каждую плитку на две части и разложить части каждой плитки в две разные кучки, чтобы из N частей одной кучки можно было сложить квадрат, а из N частей другой кучки — прямоугольник?

7. **(a)** На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/99$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на отношение их произведения к их сумме. После нескольких операций осталось одно число. Какое?
(b) Тот же вопрос для чисел $1, 2, 4, 8, \ldots, 1024$.
(c) Тот же вопрос для чисел $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ n \cdot (n+1)$.

Домашнее задание

1. Докажите неравенство

$$\sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}\,.$$

2. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \leqslant y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами x и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

3. На доске выписаны числа $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/99$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на $ab + b + a$. После 98 операций осталось одно число. Какое?

4. В противоположных углах шахматной доски стоят белая и черная фишки. Ходят по очереди на соседнюю по стороне клетку, начинают белые. Белые стремятся получить прямоугольный треугольник с вершинами в центре доски и центрах клеток с фишками. Могут ли черные им помешать?

Жадный алгоритм

Это жадность-то до добра не доводит?!!!

Алгоритм — это способ достижения цели через жестко определенную последовательность шагов. Когда в ответе надо предъявить алгоритм, естественно рассматривать его как составную конструкцию. Типичные примеры: выигрышная или ничейная стратегия в играх. Кроме того, алгоритмы регулярно возникают в задачах на испытания. Если цель — максимум какой-то величины, то ее часто достигают с помощью «жадного алгоритма», то есть, добиваясь максимально возможного приращения на каждом шаге.

1. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

2. На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается получить как можно больше сыра по весу. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Бывает полезно ввести вспомогательную величину для оптимизации.

3. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?

Экономные действия позволяют строить примеры проще

4. На плоскости нарисован черный равносторонний треугольник. Имеется десять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного треугольника (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

Отклонение от жадности

Часто можно показать, что жадный алгоритм не достигает результата. Доказав недостижимость, подумайте, нельзя ли из этого извлечь указания, и достичь результата, следующего за жадным.

5. $ABCD$ — квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C?

6. В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?

7. **(a)** На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые — вверху?
   (b) То же для доски 9×9.

8. На столе лежат в ряд 300 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

Домашнее задание

1. На блюде лежат 15 кусков сыра двух весов. Сначала Вася может разрезать некоторые из этих кусков (но не все) каждый на две части так, чтобы в результате снова получились куски двух весов. Затем Петя берет себе один из кусков, потом Вася — один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т. д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

3. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2012$. Петя стирает их по одному. Докажите, что он может это делать в таком порядке, чтобы сумма нестертых чисел всегда была составным числом.

4. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а на последней — 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход.

5. На столе лежат в ряд 2014 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

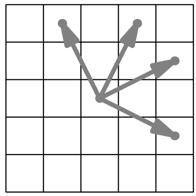
6. **(a)** 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или нескольку карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Каков будет результат игры при правильной игре сторон?
   (b) Тот же вопрос при $N!$ карточек, выигрывает тот, у кого первого произведение разделится на $N!$.

Полуинвариант

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант — это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели.

1. На Архипелаге Сыщик гоняется за Шпионом. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

Оценив изменение полуинварианта на одном шаге или на группе шагов, можно оценить, за сколько шагов процесс закончится.



2. **(a)** На шахматной доске 100×100 коню разрешено ходить только в четырех направлениях (рис. справа). Докажите, что с какой бы клетки он ни начал, ему удастся сделать лишь конечное число ходов.
   (b) Какое наибольшее число ходов конь может сделать на этой доске?

Типичные полуинварианты: сумма, произведение, модуль разности, сумма модулей, сумма квадратов и их комбинации (например, суммы).

3. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.

4. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.

Для строки целых чисел (или объектов) полуинвариантом может быть многозначное число в некоторой системе счисления.

5. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую.
   (a) Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.
   (b) Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

6. **(a)** В строке записаны 100 цифр. Петя находит пару рядом стоящих цифр, где правая меньше левой, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно перестановки пре-

кратятся.

(b) В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, \dots, 100$. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2, \dots, 100$.

Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может зациклиться). В большинстве игр наличие полуинварианта гарантирует, что игра закончится.

7. Есть 10 различных чисел. За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой.

(a) Может ли процесс продолжаться бесконечно?

(b) Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?

Если полуинвариант может принимать лишь конечное число значений, или убывает, принимая лишь натуральные значения, то он достигнет «крайнего» значения. Это может обеспечить искомую позицию.

8. **(a)** В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается поменять в нем все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время во всех таких прямоугольниках плюсов будет больше чем минусов.

(b) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из 99 клеток сумма отрицательна, разрешается поменять в нем знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из таких прямоугольников сумма будет неотрицательной.

(c) Как в предыдущем пункте, но числа — действительные.

Домашнее задание

1. Есть 10 различных целых чисел (не обязательно положительных). За одну операцию можно два не равных числа одинаковой четности заменить на два равных с той же суммой. Может ли процесс продолжаться бесконечно?

2. Вначале на доске было написано натуральное число, меньшее 1000. Каждым ходом число увеличивали в q раз.

(a) После каждого из первых 9 ходов получалось целое число. Верно ли, что и дальше будут получаться только целые числа?

(b) То же, но целые числа получались после каждого из первых 10 ходов?

3. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. Вначале было больше 100 орехов. Докажите, что хотя бы один орех будет съеден.

4. В Стране Оз все города подняли над ратушами флаги — голубые либо золотистые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

Дополнительная задача

5. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый — из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т. д.

(a) Все кузнечики одновременно вернулись в исходные точки, каждый в свою. Какое наименьшее число прыжков мог сделать каждый кузнечик?

(b) Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано 12 прыжков?

(c) Как в предыдущем пункте, но 13 прыжков?

Переправы и инварианты

Сколь ни вдоль, а поперек изволь. *Поговорка*

0. *Затравка.* Дан жесткий проволочный контур квадрата площади 1 дм^2. Его разрезали на части и спаяли заново. Получился контур плоского многоугольника.
(a) Резали на 3 части. Какова наибольшая возможная площадь нового многоугольника?
(b) Резали на 4 части. Могла ли получиться площадь не менее 105 см^2?

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории (два берега, два цвета), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться.

1. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что есть точки разного цвета на расстоянии 1 мм.

2. Можно ли на всех полях шахматной доски расставить коней четырех мастей так, чтобы вороные не били соловых, соловые — гнедых, гнедые — каурых, а каурые — вороных?

Вместо цветов используют значения какой-нибудь величины, например, остатки. Переправа может оказаться ключевым местом решения: надо только суметь привязать к ней вопрос задачи.

3. Можно ли расставить в таблице 8×8 числа от 1 до 64 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась **(a)** на 4; **(b)** на 3?

4. Натуральные числа раскрашены в синий и красный цвета, причем чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что найдется бесконечно много чисел, представимых как сумма двух различных синих, так и как сумма двух различных красных.

Типичная ситуация: есть набор позиций (состояний) и переходы между ними. Это можно рассматривать как граф. Пусть с каждой позицией можно связать некоторую величину. Если величина при переходах не меняется, она — инвариант. Значения инварианта разбивают граф на компоненты связности, и нет маршрута между позиций с разными значениями инварианта. Соответственно, можно доказывать невозможность действия: например, нельзя доехать на поезде от Нью-Йорка до Москвы, поскольку поезда из Америки ходят только в Америку. Но можно доказать и существование: если добраться таки удалось, то был либо перелет, либо плавание.

Типичные инварианты: четность, общий делитель, сумма.

5. В банке 1100 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 370 долларов или положить в него 111 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

6. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 37 кучек камней?

Нечисловые инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством.

7. Картонный треугольник катают по плоскости, перекатывая через сторону. После 2015 перекатываний он попал в точности на исходное место. Докажите, что треугольник равнобедренный.

8. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычная шахматная ладья. Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на черную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

9. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шагу выбирали любую одну из уже имеющихся частей и разрезали ее (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

Домашнее задание

1. Натуральные числа от 1 до 2015 покрашены в красный и синий цвета. Есть пара красных и пара синих чисел с одинаковыми произведениями. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами.

2. По шахматной доске прокатили кубик. Он встал той же гранью на ту же клетку. Может ли кубик оказаться повернутым на 90° вокруг вертикальной оси?

3. *(Сдать письменно 2 или 3 апреля.)* Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — N л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. При каких целых N можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

4. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть числа a_1^2, a_2^2 и a_3^2. Докажите,что эта прогрессия состоит из целых чисел.

Дополнительные задачи

5. Дана пустая таблица размера 13×17. Двое по очереди ставят в нее фишки в ее пустые клетки. Первый может поставить фишку на пересечение строки и столбца, если в строке и столбце в сумме четное число фишек, второй — если нечетное. Игра заканчивается, когда ход невозможен. Докажите, что последний ход всегда делает один и тот же игрок. Кто именно?

6. Можно ли расставить в таблице 50×50 числа от 1 до 2500 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась на 4?

7. На главной диагонали квадрата 101×101 стоят пять ладей. Каждым ходом можно переставить одну из ладей в любом направлении по вертикали или горизонтали вплотную к ближайшей ладье или стенке квадрата (перепрыгивать через ладьи нельзя). Может ли в итоге одна ладья оказаться в центральной клетке квадрата, а остальные четыре — в клетках, соседних по стороне с центральной?

8. Ножки циркуля поставили в узлы бесконечной клетчатой решетки. За один ход можно передвинуть одну ножку в другой узел, не отрывая другой и не меняя раствора циркуля. Можно ли вернуться в исходные вершины, поменяв местами ножки?

Конечное и бесконечное

Дирихле на бесконечности

Если бесконечную кучу разделить на конечное число частей, хотя бы одна из частей должна быть бесконечной.

1. Докажите, что есть бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 2015 одинаковый остаток.

2. Докажите, что среди цифр в десятичной записи $\sqrt{2}$ есть две цифры, каждая из которых встречается бесконечно много раз.

3. Круг разделен на 2015 секторов, и в каждом написано целое число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано k), фишка сдвигается на $|k|$ секторов по часовой стрелке, и там, куда она придет, число увеличивается на 1. Докажите, что со временем все числа станут больше миллиона.

Капля камень точит

Принцип Архимеда. Складывая само с собой любое положительное число (даже очень малое), можно превзойти любое число (даже очень большое).

4. **(a)** Может ли сумма бесконечного числа положительных слагаемых быть конечным числом?
(b) Докажите, что среди сумм вида $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ есть сколь угодно большие.

5. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на один из них. Докажите, что луч света отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).

6. Трактор равномерно растягивает резиновый жгут длиной 10 м со скоростью 1 м/мин. По жгуту с одного конца ползет улитка со скоростью 1 см/мин. Может ли она со временем доползти до другого конца жгута?

Сколько бы ни было — хочется еще

Следует различать «сколь угодно большое» и «бесконечное».

7. **(a)** Докажите, что есть сколь угодно длинная группа подряд идущих составных чисел.
(b) Найдется ли бесконечная группа подряд идущих составных чисел?

8. **(a)** Продлим шахматную доску вправо и влево на миллион клеток. Король стоит на средней клетке нижней горизонтали. Может ли он обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?

(b) Тот же вопрос, если доску продлили вправо и влево до бесконечности?

Ковшом моря не вычерпаешь

Если покрыто целое, то покрыта его любая часть.

9. Можно ли покрыть прямую конечным числом кругов?

10. На плоскости отметили миллион точек, и через каждые две провели прямую. Докажите, что можно провести еще одну прямую так, чтобы угол между ней и любой ранее проведенной выражался нецелым числом градусов.

11. Полоса — это часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?

12. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?

Домашнее задание

1. **(a)** На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.
(b) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдется кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.

2. Бесконечная во все стороны шахматная доска покрыта домино так, что каждое домино покрывает клетки. Может ли случиться, что каждая прямая, идущая по границам клеток, режет пополам
(a) лишь конечное число домино; **(b)** бесконечное число домино?

3. Докажите, что бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, больших своего номера в этой последовательности.

4. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Дополнительные задачи

5. Верно ли, что среди сумм вида $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2$ есть сколь угодно большие?

6. Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку A. Доказать, что точка, лежащая с A по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая A, неограничена.

7. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен и имеет конечное число детей. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

8. С центрами в целых точках прямой расположены ямы, шириной 0,01 каждая. Длина прыжков блохи постоянна и равна $\sqrt{2}$. Докажите, что блоха рано или поздно попадет в яму. (Блоха начинает из произвольной точки.)

Дискретная непрерывность и разрывы

Если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием — дискретной непрерывностью…

1. **(a)** В баскетбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Команды в сумме набрали более 100 очков. Верно ли, что в какой то момент счет был ничейный? (Попадание в корзину «с игры» приносит команде 2 или 3 очка)
   (b) В футбольном матче первым забил «Зенит», а выиграл «Спартак». Докажите, что в какой то момент счет был ничейный.

2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

Полезно раскрасить объекты в два цвета так, чтобы граница или разрыв отделяли цвета.

3. В последовательности целых чисел каждое число, начиная со второго, на 1 больше предыдущего или в 3 раза меньше предыдущего. Первое число равно 1, последнее равно 100. Докажите, что среди чисел есть и 77.

4. В ряд лежат 100 яблок, соседние отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что если выложить яблоки в ряд по возрастанию веса, то и тогда соседние будут отличаться не более чем на 10 г.

Если процесса нет, организуй сам. Подбери начало и конец процесса так, чтобы они были по разные стороны от нужного значения.

5. В ряд сидит 15 мальчиков и 15 девочек.
   (a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
   (b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

6. **(a)** По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
   (b) По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 18 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

Через промежуточное значение можно не только пройти, но и перепрыгнуть.

7. **(a)** В строке четырехзначных чисел первое число 2015, последнее 2051. Соседние числа отличаются на 1 или на 100. Верно ли, что хотя бы одно число делится на 101?
   (b) Дополнительно известно, что ни одно число не делится на 100. Докажите, что хотя бы одно число делится на 101.

В некоторых процессах полезно начало и конец поменять местами. Тут помогает расположение на окружности.

8. На окружности отмечены 77 точек, среди них нет диаметрально противоположных. Докажите, что можно провести диаметр через одну из точек так, что по обе стороны диаметра точек окажется поровну.

9. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек.
(a) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две части, в одной из которых будет 300 шашек.
(b) Докажите, что где бы они не стояли, доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек.

Из соображений непрерывности чаще всего доказывают существование или невозможность некого объекта или конструкции, не предъявляя его явно. Однако дискретная непрерывность бывает полезна и в задачах на конструкцию. Например, построив алгоритм, докажем через непрерывность, что он сработает.

10. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах.

Домашнее задание

1. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см.
(a) В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.
(b) Докажите, что если солдаты встанут по росту, то по-прежнему рост соседей будет отличаться не более, чем на 2,4 см.

2. За круглым столом равномерно посажены 100 дедов, причем у любых двух соседей количество волос в бородах отличается не больше, чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих напротив друг друга, у которых количество волос в бородах также отличается не больше, чем на 100.

3. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

4. В одном из 100 окопов, расположенных в ряд, спрятался робот-пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами робот (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный).
(a) Известно, что вначале слева от робота — нечетное число пустых окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?
(b) Вначале робот может быть в любом из окопов. Сможет ли пушка наверняка накрыть робота?

Дополнительные задачи

5. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Про положение короля ничего не известно. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах.

6. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?

7. Вершины пятидесятиугольника делят окружность на 50 дуг, длины которых равны числам $1, 2, 3, \ldots, 50$, взятым в каком-то порядке. Каждая пара «противоположных» дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Докажите, что у пятидесятиугольника найдется пара параллельных сторон.

8. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.

Неоднозначные данные

«А это вам знать пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников все-таки увидели то, что знать пока рано?

Неразличимые примеры

Чтобы доказать, что информации недостаточно для получения однозначного ответа, можно построить два примера, которые удовлетворяют всем условиям, но дают разные ответы.

1. В ряд выписаны 100 чисел, первое равно 3, а сумма любых трех подряд равна 100. Можно ли наверняка узнать, чему равно
(a) 100-е число? **(b)** 50-е число?

2. **(a)** Незнайка утверждает, что он может узнать с помощью чашечных весов без гирь, есть ли среди любых трех камней такой, вес которого равен 1/3 общего веса. Не хвастает ли он?
(b) А узнать, есть ли среди десяти камней камень веса 1/10 от общего веса?

3. Все виды растений одной страны были занумерованы подряд натуральными числами от 2 до 20000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

4. У Кащея есть куб, в каждой вершине которого вставлено по алмазу. Известны веса этих алмазов: 1 карат, 2 карата, ..., 8 карат. Кащей предлагает Ивану Царевичу такую игру: он сообщает Ивану сумму весов алмазов на каждом ребре. Если после этого Иван правильно назовет, куда какой по весу алмаз вставлен, то получит этот куб вместе с алмазами, а если хотя бы в одном месте ошибется, то распрощается с головой. Стоит ли Ивану соглашаться играть?

Примеры «задним числом»

Неразличимые примеры и контрпримеры могут строится после того, как испытания уже проведены и ответы даны, с использованием уже полученной информации. Этот метод часто применяется, чтобы опровергнуть предположение о наличие «гарантированного» алгоритма.

5. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка P внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать

(a) за два вопроса? **(b)** за три вопроса?

6. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

7. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

   (a) Суд уже установил, что фальшивых монет 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?

   (b) Суд уже установил, что фальшивых монет 0 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?

8. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться, чтобы после «стопа» рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

Домашнее задание

1. *Письменная задача.* В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Всегда ли по этой информации можно узнать пару крайних карт колоды?

2. **(a)** В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?

   (b) То же для доски 9×9 и чисел от 1 до 81.

3. У N ключей от N гостиничных номеров потерялись бирки. Известно, что каждый ключ открывает ровно один из номеров. Какое наименьшее число пробных открываний дверей надо сделать, чтобы наверняка определить, от какого номера каждый ключ?

Дополнительные задачи

4. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

(a) Суд уже установил, что фальшивых монет 2 или 3. Как адвокату показать, что их ровно 3?

(b) Суд уже установил, что фальшивых монет 2, 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 3?

(c) Суду о числе фальшивых монет ничего не известно. Как адвокату показать, что их ровно 10?

5. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали, и раздали Грише и Леше по 3 карты, а оставшуюся карту

(a) спрятали; **(b)** отдали Коле.

Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом Коля не смог вычислить местонахождение ни одной из карт (кроме той, что у него)?

Принцип крайнего

Идея 1. Обратите внимание на объекты «с краю», где край понимается геометрически (граница, вершина, угол) или арифметически (наибольшее, наименьшее). Можно рассматривать и несколько крайних объектов. Так, для получения оценки бывает полезным выбрать два крайних объекта: для разностей — наибольший и наименьший, для расстояний — наиболее удаленные друг от друга.

1. В порядке возрастания весов лежат несколько камней. Есть чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний можно проверить, правда ли, что любая пара камней тяжелее любого одного камня?

2. На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких шести из выписанных чисел.

Критический момент часто случается в конце процесса.

3. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. Вначале было больше 100 орехов. Докажите, что хотя бы один орех *не* будет съеден.

Идея 2. *Минимальный контрпример.* Условие минимальности облегчает поиск (или построение) контрпримера, а доказав, что нет минимального, мы докажем и отсутствие контрпримеров вообще. В частности, полезно сократить на общий делитель.

4. Пусть $2^x = 10$. Докажите, что x — иррационально.

5. На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых пяти из этих чисел найдутся такие шесть из этих чисел, что равны средние арифметические этой пятерки и этой шестерки. Докажите, что все числа равны.

Домашнее задание

1. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы все 100 читателей его услышали.

2. Числа p и q — целые, $x^2 + px + q > 0$ при всех целых x. Докажите, что $x^2 + px + q > 0$ и при всех нецелых x.

3. Пусть a, b, c — натуральные числа. Могут ли НОК(a, b) и НОК$(a + c, b + c)$ быть равны?

Дополнительные задачи

4. На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечетное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей).

5. Первоначально на доске написано число 2004!. Два игрока ходят по очереди. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа какое-нибудь натуральное число, которое делится не более чем на 20 различных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто из играющих — начинающий или его соперник — может гарантировать себе победу, и как ему следует играть?

Индукция

Математическая индукция помогает коротко записать строгое решения, но не объясняет, как его придумать, и в чем его смысл.

Индуктивное построение

Наиболее оправдано применение индукции при построении сложных конструкций, когда очередной этаж строится на основе уже построенных нижних этажей. Такое построение может быть при необходимости преобразовано в явный алгоритм.

1. В компании из n человек ($n \geqslant 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n-4$ звонка все смогут узнать все новости?

2. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

Доказывай больше

Для шага индукции может потребоваться больше свойств, чем мы хотим доказать. Нередко эти дополнительные свойства доказывают тоже по индукции, расширив на них доказываемое утверждение. Например, вместо неравенства $1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\ldots+1/((n-1)\cdot n)<1$ легче доказывать равенство $1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\ldots+1/((n-1)\cdot n)=1-1/n$.

3. Дан правильный треугольник со стороной 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после n ходов наибольшая сторона будет меньше $(n+2)$-го члена ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Рекурсия

Редукция сводит решение задачи к более простой. Пусть удается свести к такой же задаче с меньшим значением полуинварианта. Если полуинвариант не может уменьшаться бесконечно, а для его крайних значений задача решена, то это — *рекурсия.* Такую *цепочку редукций* тоже оформляют как индукцию, объявляя полуинвариант параметром индукции.

4. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?

Индукция незаменима при логической рекурсии («иль думал, что я думала, что думал он я сплю»).

5. 10 бандитов ограбили банк на миллион долларов и уселись в ряд за стол делить деньги. Сначала первый предлагает, кому сколько: мне столько-то, второму столько-то и т. д., и все 10 голосуют. Если «за» не менее половины, то предложение принимается, каждый получает предложенную долю, и все расходятся. Если более половины голосуют «против», первого убивают, и тогда уже второй бандит предлагает кому сколько на тех же условиях, и т. д. Каждый бандит руководствуется в первую очередь желанием выжить, во вторую (если жизнь вне опасности) — получить побольше денег, в третью (если на жизнь и сумму это не влияет) — не убивать без необходимости (дело-то не последнее!). Как распределятся деньги, если все бандиты будут действовать и рассуждать абсолютно логически?

Дополнительные задачи

1. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.

2. Есть гири с номерами от 1 до n, для каждого k вес k-й гирьки целый и не превосходит k, а сумма всех весов четна. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

3. В вершинах связного графа с n вершинами записано по два положительных числа: синее и красное, причем сумма синих равна сумме красных. За один ход можно изменить два синих числа в концах любого одного ребра так, чтобы чтобы они остались положительными и сумма сохранилась. Докажите, что не более чем за $(n-1)$ ход можно добиться, чтобы в каждой вершине синее число стало равно красному.

Увидеть граф

Позиции и ходы

1. **(a)** На прямой сидят два кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?
   (b) То же, но кузнечиков не два, а три.

2. На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка — единственная.

3. **(a)** На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 2015 ходов?
   (b) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 2015 ходов?

Сумма степеней вершин

Факт 1. Сумма степеней вершин графа вдвое больше числа его ребер.

Факт 2. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

4. В классе учится 10 мальчиков и 15 девочек. Они отправили друг другу смски. Может ли у каждого число отправленных смсок отличается на 1 от числа полученных?

5. В пустые клетки доски 5×5 Петя по одному вписывал числа. Вписанное число равнялось количеству соседних по стороне клеток, в которые уже был вписаны числа. Петя заполнил всю доску. Найдите сумму все чисел и докажите, что она не зависит от порядка заполнения.

6. В однокруговом турнире участвовали 15 команд. Докажите, что хотя бы в одной игре встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечетном числе игр этого турнира.

Чередование и обходы

Определение. Граф — *двудольный,* если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. Пример: любое дерево.

7. Докажите, что следующие графы — двудольные:
   (a) Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку

по вертикали или горизонтали.

(b) То же, что в предыдущем пункте, но для n фишек.

(c) Вершины — перестановки из n чисел $1, 2, \ldots, n$, ребра — расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух соседних чисел.

(d) Вершины — перестановки из n чисел $1, 2, \ldots, n$, ребра — расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух любых чисел.

8. Пусть Γ — двудольный граф с черными и белыми вершинами. Докажите, что

(a) Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.

(b) Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.

9. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

10. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке.

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

11. **(a)** Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

(b) В кубике Рубика $3 \times 3 \times 3$ отмечены вершины клеток, середины сторон клеток и центры клеток. Центры клеток соединены отрезками с серединами сторон клеток. Можно ли по проведенным отрезкам и сторонам клеток обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Домашнее задание

1. В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток, связанных ходом коня. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел?

2. Можно ли расставить в вершинах пятиугольной призмы натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

3. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

4. На свободные поля шахматной доски по одному выставляются короли. Первый выставляется произвольно, каждый следующий должен бить нечетное число ранее выставленных. Какое наибольшее число королей можно выставить?

Дополнительные задачи

5. Поверхность куба $11 \times 11 \times 11$ разбита на клетки 1×1. Муравей бегает по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Может ли он посетить центры всех клеток?

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!». Прав ли он?

7. Гриша записал в клетки шахматной доски числа $1, 2, \ldots, 64$ в неизвестном порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может точно определить, где какое число записано.

8. Есть много одинаковых бумажных квадратов, в которых проведены обе диагонали. Квадратами оклеили куб $100 \times 100 \times 100$ без щелей и наложений (при этом, возможно, перегибая квадраты через ребра и располагая косо). Жучка посадили в одну из вершин куба и разрешили ползать только по диагоналям квадратов. Докажите, что он может добраться в какую-то другую вершину куба.

Свяжитесь с графом

Считаем ребра, вершины и компоненты без циклов. Обозначим в графе В — число вершин, Р — число ребер, С — число компонент связности.

Факт 1.
(a) В дереве (то есть связном графе без циклов) $\text{В} = \text{Р} + 1$.
(b) В графе без циклов $\text{В} = \text{Р} + \text{С}$.

Факт 2.
(a) В связном графе $\text{Р} \geqslant \text{В} - 1$.
(b) В любом графе $\text{Р} \geqslant \text{В} - \text{С}$.

1. Какое наибольшее число ребер можно перекусить в проволочном каркасе додекаэдра так, чтобы каркас не развалился на части?

2. Пусть дан связный граф с n вершинами и k ребрами, причем $k > n - 1$. Докажите, что можно удалить ребро так, чтобы граф остался связным.

3. В многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Можно ли стороны и проведённые диагонали раскрасить в желтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из любой вершины в любую другую по желтым отрезкам, а клоп — по красным?

4. Из спичек сложена шахматная доска. Жук через спичку не ползает. Убрав часть спичек внутри доски, получаем *лабиринт.* Назовем его *связным,* если жук может проползти между любыми двумя клетками. Каких лабиринтов можно получить больше: связных или не связных?

Увидеть граф за условием задачи помогают *выделенные* пары объектов, в частности, соседние объекты или клетки с общей границей. Выписывая для таких графов уравнения и неравенства для В, Р, С, можно получать нетривиальные оценки.

5. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

6. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется *хорошей,* если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

7. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

8. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идет по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника? (Сторона клетки равна 1).

9. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

10. Есть 100 камней разного веса. За одно взвешивание можно про любые два камня узнать, который из них тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка определить самый тяжелый камень?

Домашнее задание

1. Куб со стороной $n \geqslant 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

2. На клетчатой бумаге по границам клеток обведен тысячеугольник. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?

3. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

4. Есть 101 банка консервов весами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний.
(a) У завхоза есть двое чашечных весов: одни точные, другие — грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1,1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?
(b) У завхоза есть только грубые весы. Какое наименьшее число взвешиваний ему понадобится?

Дополнительные задачи

5. Из спичек выложена доска 8×8 так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы после этого не осталось ни одного контура прямоугольника?

6. Есть $2n$ болельщиков: половина из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

7. Дана доска $m \times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1) \cdot (n-1) + 1$ клеток ставится по фишке. Назовем *квартетом* четверку клеток
(a) в квадратике 2×2;

(b) в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски.

Если в квартете есть ровно одна фишка, ее разрешается снять. Докажите, что разрешенными операциями нельзя снять все фишки.

8. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q взаимно просты). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

Глава 3

Белые Ладьи (10-2)

Тренировочная олимпиада

1. Бесконечная последовательность $a_0, a_1, \ldots$ натуральных чисел такова, что $a_n^2 > a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ при любом натуральном n. Докажите, что $a_k > k$ при любом натуральном k.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точка M на прямой BC такова, что $MI \perp AI$. Точка D — основание перпендикуляра из I на AM. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

3. На доске написано число 0. Два игрока по очереди приписывают справа к выражению на доске: первый — знак «+» или «−», второй — одно из натуральных чисел от 1 до 2015. Игроки делают по 2015 ходов, причем второй записывает каждое число от 1 до 2015 ровно по одному разу. В конце игры второй игрок получает выигрыш, равный модулю алгебраической суммы, написанной на доске. Какой наибольший выигрыш он может себе гарантировать?

4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n + 1)$-й степенью.

Тригонометрия

1. Докажите, что при всех $x \in (0, \pi/3)$ справедливо неравенство $\sin(2x) + \cos(x) > 1$.

2. Найдите все углы α. для которых набор $\sin(\alpha)$, $\sin(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ совпадает с набором $\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$.

3. Для углов α, β, γ справедливо равенство $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \geqslant 2$. Докажите, что $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leqslant \sqrt{5}$.

4. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b \cdot \cos x$. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

5. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенству $|f(x + y) + \sin(x) + \sin(y)| < 2$?

6. Найдите все пары $x, y \in (0, \pi/2)$, удовлетворяющие равенству $\sin(x)+\sin(y) = \sin(xy)$.

7. Докажите, что для каждого x такого, что $\sin(x) \neq 0$, найдется такое натуральное n, что $|\sin(nx)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Пусть α, β, γ, τ — такие положительные числа, что при всех x выполняется $\sin(\alpha x) + \sin(\beta x) = \sin(\gamma x) + \sin(\tau x)$. Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \tau$.

9. Пусть

$$a_0 = \sqrt{2}\,,\ b_0 = 2\,,\quad a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}\,,\quad b_{n+1} = \frac{2b_n}{2 + \sqrt{4 + b_n^2}}\,.$$

Рассмотрим последовательность $c_n = a_n/b_n$. Найдите c_{2015}.

10. Последовательность чисел $\{h_n\}$ задана условиями

$$h_1 = \frac{1}{2}\,,\quad h_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - h_n^2}}{2}}\,,\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} h_k < 1{,}03$.

Рекуррентные соотношения

1. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n},\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите, что $a_n < 2$ при $n \geqslant 1$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно как

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),\ n \geqslant 2\,.$$

Найдите a_{2013}.

3. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, заданная как

$$a_1 = 2013, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n \cdot a_n},\ n \geqslant 1\,.$$

Найдите a_{2013}.

4. Найдите a_n, если

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + 3^n \cdot a_n},\ n \geqslant 1\,.$$

5. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2m \cdot a_{m-1} + 1},\ m > 1.$$

Найдите значение выражения $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

6. Докажите, что если

$$u_0 = 0{,}001, \quad u_{n+1} = u_n \cdot (1 - u_n),\ n \geqslant 0\,,$$

то $u_{1000} < 1/2000$.

7. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n},\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите, что $a_n < 2$ при $n \geqslant 1$.

8. Последовательность a_n определена следующим образом:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{a_{n-1}}\,.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

9. Докажите, что если

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n},\ n \geqslant 1\,,$$

то $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-210}$.

10. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n},\ n \geqslant 1.$$

Найдите $[a_{2015}]$.

Показатели

Определение. Натуральное число d называется *показателем числа a по модулю m*, если d является наименьшим натуральным числом таким, что $a^d \equiv 1 \pmod{m}$.

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ равна количеству натуральных чисел, взаимно простых с n, не превосходящих n. Если $p_1, \ldots, p_k$ — весь набор простых делителей числа n, то

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Теорема Эйлера. Натуральные числа a и m взаимно просты. Тогда

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Из теоремы Эйлера следует, что если $(a, m) = 1$, то такой показатель d существует. Если же $(a, m) > 1$, то такого d не существует.

1. Числа a, m, l — натуральные, $(a, m) = 1$. Докажите, что $a^l \equiv 1 \pmod{m}$ равносильно тому, что $d \mid l$. (То есть, возводя число a в степени $1, 2, 3, \ldots$, получаемые остатки при делении на m повторяются с периодом d.)

В частности, из этой задачи следует, что показатель числа a по модулю m делит $\varphi(m)$.

2. Пусть $p = 3k + 2$ — простое.
(a) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет единственное решение.
(b) Докажите, что для любого остатка a сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ имеет единственное решение.

3. Пусть p — простое, $p > 2$.
(a) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(b) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p + 1$, больший 3, представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(c) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p + 3^p$, больший 5, представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(d) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что любой делитель числа $2^{2^n} + 1$ представим в виде $2^{n+1} \cdot k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

4. Пусть p — простое. Докажите, что у числа $(p^p - 1)$ есть простой делитель, дающий остаток 1 при делении на p.

5. Докажите, что для любых натуральных a и n, больших единицы, справедливо $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

6. Найдите все пары (p, q) простых чисел таких, что $pq \mid (7^p - 2^p) \cdot (7^q - 2^q)$.

7. Найдите все натуральные n такие, что $n \mid (2^n - 1)$.

8. Найдите все натуральные n, для которых числа n и $2^n + 1$ имеют один и тот же набор простых делителей.

9. Для натурального a обозначим через P_a множество всех простых чисел, не являющихся делителями ни одного из чисел вида $(2^{k \cdot 2^a} - 1)$, где k — нечетное натуральное число. Докажите, что при любом натуральном a множество P_a бесконечно.

Алгебраический разнобой

1. Все коэффициенты квадратного трехчлена — целые нечетные числа. Может ли он иметь целые корни?

2. Квадратный трехчлен x^2+ax+b имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что $|a+b+1|$ — составное число.

3. Докажите, что многочлен $x^p + x^{p-1} + \ldots + x + p = 0$, где p — простое число, не имеет рациональных корней.

4. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.

5. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

6. Докажите, что

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(p-1)) \pmod p$$

(т. е. коэффициенты при каждой из степеней будут совпадать по модулю p.)

7. Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет n различных целых корней. Докажите, что если любые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

8. Существуют ли такие приведенные квадратные трехчлены f и g, что для любого целого n число $f(n)\cdot g(n)$ — целое, а числа $f(n)$, $g(n)$ и $f(n)+g(n)$ — нецелые?

9. Назовем многочлен *средиземноморским*, если он имеет только действительные корни и имеет вид

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + \\ + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Коэффициенты $a_0, \ldots, a_7$ — действительные числа. Найдите наибольшее действительное число, которое может быть корнем средиземноморского многочлена.

Разные задачи про квадратные уравнения

1. Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2+px+q$, у которых $p+q/2 = 2001$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

2. Пусть a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + 8x + b$ и минимального значения квадратного трехчлена $g(x) = bx^2 + 8x + a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

3. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) > 0$.

4. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку.

5. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x} + 1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Можно ли с помощью таких операций из трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трехчлен $x^2 + 10x + 9$?

6. Различные числа a, b, c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите $a + b + c$.

7. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2+ax+b$. Известно, что для любого вещественного x существует вещественное y такое, что $f(y) = f(x)+y$. Найдите наибольшее возможное значение a.

8. Квадратный трехчлен $p(x)$ таков, что $|p(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Докажите, что $p(-1/2) \leqslant 7$.

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Известно, что $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что $f(n)$ кратно трем для любого целого n.

2. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

3. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$, где a и b — различные целые числа.

4. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

5. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

6. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если уравнение $P(x) = 1$ имеет больше трех целочисленных корней, то уравнение $P(x) = -1$ не имеет целочисленных корней.

7. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 5 при пяти различных целых значениях x. Может ли $f(x)$ иметь целые корни? Может ли $f(n)$ равняться -6 при целом n?

8. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что этот многочлен нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

9. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что число $P(k)$ делится на $Q(k)$ при любом целом k. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$.

10. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$$

нельзя разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

Опять многочлены

1. Бесконечная последовательность $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ определена как

$$P_0(x) = x, \quad P_n(x) = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1),\ n \geqslant 1.$$

Найдите наибольшее k такое, что $P_{2014}(x)$ делится на x^k.

2. Пусть $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $x \in [-1; 1]$. Найдите максимум выражения $a^2 + b^2 + c^2$.

3. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

4. Даны корни x_0 и x_1, x_0 и x_2, ..., x_0 и x_n квадратных трехчленов $y = x^2 + a_1x + b_1$, $y = x^2 + a_2x + b_2$, ..., $y = x^2 + a_nx + b_n$. Найдите корни квадратного трехчлена

$$y = x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot x + \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

5. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x^3 + x) \geqslant P(x^2 + 1)$ для всех действительных x. Найдите сумму корней $P(x)$.

6. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что каждое из выражений $3f(x)+g(x)$ и $f(x) - g(x)$ — квадратные трехчлены, имеющие ровно один корень. Известно также, что $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $g(x)$ не имеет корней.

7. Пусть $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x)$ — кубический многочлен, корни которого являются квадратами корней многочлена $f(x)$. Найдите $g(x)$.

8. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие условиям $P(x^2) = x^2 \cdot (x^2 + 1) \cdot P(x)$, $P(2) = 2$.

Производные

1. Докажите, что уравнение $4x^3 - 3bx^2 + 2cx - d = 0$ имеет 3 действительных корня тогда и только тогда, когда существует действительные числа m, n, p, q такие, что

$$\begin{cases} b = m + n + p + q, \\ c = mn + mp + mq + np + nq + pq, \\ d = mnp + mnq + mpq + npq. \end{cases}$$

2. Многочлен четвертой степени $P(x)$ имеет четыре корня, попарные расстояния между которыми не меньше 1. Докажите, что найдутся два корня $P'(x)$, находящиеся на расстояние не меньше 1.

3. Найдите все действительные a и b такие, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет не более двух положительных корней при всех значениях c.

4. Сколько существует многочленов вида $x^3 + ax^2 + bx + c$ таких, что множество их корней есть $\{a, b, c\}$?

5. Докажите, что при целых значениях c уравнение $x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 10) = c$ не может иметь пяти целых корней.

6. Докажите, что если все корни многочлена с действительными коэффициентами $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ действительны, то и все его производные имеют лишь действительные корни.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n и $P(a) \geqslant 0$, $P'(a) \geqslant 0$, …, $P^{(n-1)}(a) \geqslant 0$, $P^{(n)}(a) > 0$. Докажите, что действительные корни уравнения $P(x) = 0$ не превосходят a.

8. Докажите, что многочлен

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

9. Пусть

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_n}{n+1} = 0\,.$$

Докажите, что многочлен $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

Суперпозиция многочленов

1. Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

2. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ также не имеет вещественных корней.

3. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение
$$f(f(f(x))) = 0$$
имеет 7 различных корней?

4. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2001$ действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001) > 1/64$.

6. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

7. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение
$$f(g(h(x))) = 0$$
иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

8. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что $f(f(x)) = x$ не может иметь ровно три действительных корня.

Неравенство Йенсена

Определение. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[a;b]$, если для любых $x, y \in [a;b]$ и любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, выполняется $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \leqslant \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$. Функция f называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a;b]$, если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$.

Теорема. Если для всех $x \in (a;b)$ выполняется $f''(x) \geqslant 0$, то функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$. Если для всех $x \in (a;b)$ выполняется $f''(x) \leqslant 0$, то функция f выпукла вверх на отрезке $[a;b]$.

1. **Неравенство Йенсена.** Пусть функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a;b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Тогда справедливо неравенство
$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n) \leqslant \alpha_1 \cdot f(x_1) + \ldots + \alpha_n \cdot f(x_n)\ .$$
Для выпуклой вверх функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$.

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0;\pi]$. Докажите неравенство
$$\frac{\sin(x_1) + \ldots + \sin(x_n)}{n} \leqslant \sin\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)\ .$$

3. *Неравенство Коши.* Используя неравенство Йенсена для $y = \ln x$, докажите для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неравенство:
$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}\ .$$

4. *Неравенство о среднем степенном.* Используя неравенство Йенсена для $y = x^\alpha$, докажите для $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, $\alpha > 1$ неравенство:
$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\ .$$

5. *Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.* Используя неравенство Йенсена для $y = \frac{1}{x}$, докажите:
$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2\ .$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите, что
$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c}\ .$$

7. Пусть α, β, γ — углы некоторого треугольника (возможно, вырожденного). Какие значения может принимать величина
(a) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)$; **(b)** $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)$?

8. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 64\,.$$

9. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b}\leqslant\left(\frac{a}{c}\right)^{a}\cdot\left(\frac{b}{d}\right)^{b}\,.$$

Степень точки

1. На плоскости даны точки A, B, C, D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB тогда и только тогда, когда $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

2. Даны две точки A и B и число k. Найдите геометрическое место точек M таких, что $AM^2 - BM^2 = k$.

Определение. *Степенью точки* M относительно окружности называется величина $d^2 - R^2$, где d — расстояние от M до центра окружности, R — радиус окружности.

3. **(a)** Докажите, что степень точки, лежащей вне окружности, равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки к окружности.
(b) Докажите, что степень точки равна произведению $\pm AM \cdot BM$, где A и B — точки пересечения с окружностью произвольной прямой l, проходящей через M (знак «+» в случае, если точка вне окружности; знак «−», если точка внутри окружности).

4. Докажите, что геометрическим местом точек, имеющих одинаковую степень относительно двух данных неконцентрических окружностей, является **прямая,** перпендикулярная их линии центров.

Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.

Упражнение. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

5. Две непересекающиеся окружности имеют четыре общие касательные. Докажите, что середины четырех полученных отрезков касательных лежат на одной прямой.

6. Центры трех окружностей образуют треугольник. Проведены радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной **точке.**

Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей.

7. Пусть O — радикальный центр трех окружностей, каждая из которых лежит вне двух других. Докажите, что точки касания шести касательных, проведенных из точки O, лежат на одной окружности.

8. Даны две неконцентрические непересекающиеся окружности S_1 и S_2. Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих S_1 и S_2 под прямым углом, является их радикальная ось.

9. Дана окружность S и точки P и K вне ее. Через точку проводится секущая PAB (A и B — точки пересечения с окружностью). Построим описанную окружность треугольника KAB. Докажите, что все такие окружности имеют общую точку, отличную от K.

10. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром M и радиусом MC проходит через середину AB.

11. В угол вписаны две окружности. Одна окружность касается одной стороны угла в точке A, вторая окружность касается другой стороны угла в точке B. Докажите, что прямая AB высекает на окружностях равные хорды.

12. С центром в точке O построены большáя окружность и маленькая окружность. Из точки A большой окружности проведены касательные AB, AC к маленькой (B, C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает большую окружность в точках M, N. Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC.

13. AB — диаметр окружности ω, C — точка на ней же. Окружность с центром в точке C касается прямой AB в точке D и пересекает ω в точках E и F. Докажите, что отрезок EF точкой пересечения делит отрезок CD пополам.

14. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных к этим окружностям из точки пересечения диагоналей, равны.

Радикальная ось

1. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках C', A' и B' соответственно. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой (точнее, на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности).

3. Докажите, что радикальная ось вписанной и вневписанной окружностей треугольника проходит через середину его стороны и перпендикулярна биссектрисе угла, противоположного этой середине.

4. Пусть B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB. На продолжениях сторон AB, AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно, так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y, BC лежат на одной прямой.

5. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

6. A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Точка P — произвольная. Серединный перпендикуляр к отрезку PA_1 пересекает прямую BC в точке A_2. Аналогично строятся точки B_2 и C_2. Докажите, что A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

7. **(a)** Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда A_1B_1 первой окружности и хорда A_2B_2 второй окружности. Докажите, что четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$ — вписанный.
(b) *Теорема о бабочке.* Через середину P хорды AB окружности проведены секущие A_1A_2 и B_1B_2. Хорды A_1B_1 и A_2B_2 пересекают хорду AB в точках M и N. Докажите, что $PM = PN$.

8. Пусть продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD в точке Q.
(a) Докажите, что ортоцентры треугольников BPC, APD, ABQ и CDQ лежат на одной прямой.
(b) *Прямая Гаусса.* Докажите, что середины AC, BD и PQ лежат на одной прямой.

9. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1. Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, соответственно параллельные сторонам A_1B_1 и A_1C_1, а также серединный перпендикуляр к BC, пересекаются в одной точке.

10. На стороне AC треугольника ABC взята произвольная точка X. Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AX и BX с отрезками AB и BC

соответственно. Докажите, что точка, симметричная X относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

11. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию ABC, параллельную AB, в точке C'. Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

Ортоцентр и основания высот

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC; AA_1, BB_1, CC_1 — высоты; H — ортоцентр; O — центр описанной окружности.

1. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC, лежит на прямой B_1C_1.

2. Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

3. Через центры вневписанных окружностей треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что O, H, A_1 и точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежат на одной окружности.

5. Докажите, что H, A_1 и середины высот BB_1 и CC_1 лежат на одной окружности.

6. Три окружности одинакового радиуса проходят через одну точку. Докажите, что их общая точка пересечения является ортоцентром треугольника с вершинами во вторых точках пересечения окружностей.

7. Докажите, что точки, симметричные H относительно сторон и середин сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC.

8. Пусть P — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и AB_1C_1. Докажите, что прямая PH делит сторону BC пополам.

9. Пусть H' — проекция ортоцентра на касательную в точке A к описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек A и H'.

10. Докажите, что прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из точки H на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла A, делит сторону BC пополам.

11. **(a)** Пусть O_A, O_B, O_C — центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.
(b) Пусть H_A, H_B, H_C — ортоцентры треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что треугольники $H_AH_BH_C$ и $A_1B_1C_1$ равны.

12. На прямых OA, OB и OC выбраны такие точки A', B' и C', что четырехугольники $AOBC'$, $BCOA'$ и $COAB'$ вписанные. Докажите, что описанные окружности треугольников AA_1A', BB_1B' и CC_1C' проходят через одну точку.

13. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, AC, AB соответственно. Описанные окружности треугольников $AC'B_1$ и $CA'B_1$ проходят через точку M, отличную от B_1. Докажите, что $\angle ABB' = \angle CBM$.

Биссектрисы и середины дуг

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC; A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности; A', B', C' — середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности; I — центр вписанной окружности; I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB.

1. **Лемма о трезубце.** Докажите, что $A_1B = A_1I = A_1C = A_1I_A$.
2. Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.
3. Докажите, что A' — середина отрезка I_BI_C.
4. Докажите, что диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, параллельны сторонам треугольника ABC и пересекаются в точке I.
5. Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Докажите, что EF касается вписанной окружности треугольника ABC.
6. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки P и Q соответственно так, что $AC = QC = PA$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABQ и CBP пересекаются на биссектрисе угла B.
7. Пусть $AB < AC$. M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle IMB = \angle IA'A$.
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.
9. Докажите, что середина стороны BC, основание высоты из вершины A и основания перпендикуляров из вершин B и C на внешнюю биссектрису угла A лежат на одной окружности.
10. Пусть L — точка пересечения BC и AA_1, K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на AB и AC. Докажите, что четырехугольник AKA_1M равновелик треугольнику ABC (т. е. имеет ту же площадь).
11. Пусть H — основание высоты из вершины A. Докажите, что прямая BC является биссектрисой угла I_AHI.

Важная добавка. Воробьи (геометрия)

1. **(a)** На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, точка B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AC_0 = CA_0$ тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности.

(b) На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная вокруг A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

2. A_0, B_0, C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, AC, AB. A_1, B_1, C_1 — точки пересечения описанных окружностей треугольников AB_0C_0, A_0BC_0, A_0B_0C с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC.

3. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC таким образом, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_A, I_B, I_C и O_A, O_B, O_C — центры вписанных и описанных окружностей треугольников $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$.

(a) Докажите, что I — центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$.

(b) Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0, M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $A_0C = AC_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе угла B.

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC, $AB < BC$, B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, M — середина стороны AC. Докажите, что центры I_A, I_C вписанных окружностей в треугольники ABM и CBM, точки B и B_1 лежат на одной окружности.

Симедиана

Определение. Пусть точка S на стороне BC треугольника ABC такова, что прямая AS симметрична медиане AM относительно биссектрисы угла A. Тогда AS называется *симедианой*.

Определение. Точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB соответственно. Отрезок B_1C_1 называется *антипараллельным* отрезку BC, если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$.

1. **(a)** Пусть S — точка на стороне BC. Тогда AS — симедиана тогда и только тогда, когда $BS : SC = AB^2 : AC^2$.
   (b) Докажите, что AS делит антипараллельный отрезок пополам тогда и только тогда, когда AS — симедиана.
   (c) Пусть в треугольнике ABC точка X такова, что $\angle ABX = \angle XAC$, $\angle BAX = \angle XCA$. Докажите, что AX содержит симедиану треугольника ABC.
   (d) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что AP содержит симедиану треугольника ABC.

2. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F. К окружности ω провели касательные в точках E и F. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

3. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит AB пополам.

4. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

5. **(a)** Прямая, содержащая симедиану AS, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Докажите, что DS — симедиана треугольника DBC.
   (b) В окружности ω провели две параллельных хорды AB и CD. E — точка пересечения ω и прямой, проходящей через C и середину AB. Пусть F — середина DE. Докажите, что $\angle AFE = \angle BFE$.

6. Даны окружность, ее хорда AB и точка W — середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольно точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M. Докажите, что длина отрезка MN не зависит от выбора точки C.

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляры из точки C на A_1B_1 делит PQ пополам.

Всеросный разнобой

1. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, B_0 — середина стороны AC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P, а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.
(Всероссийская олимпиада 2008, 10.6)

2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.
(Всероссийская олимпиада 2012, 10.2)

3. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.
(Всероссийская олимпиада 2011, 10.6)

4. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность ω — в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.
(Всероссийская олимпиада 2010, 10.6)

5. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырехугольник $BXMY$ — вписанный.
(Всероссийская олимпиада 2014, 10.6)

6. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 — в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной вокруг треугольника $A_2B_2C_2$.
(Всероссийская олимпиада 2013, 10.7)

7. Треугольник ABC, $AB > BC$, вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина

дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.
(Всероссийская олимпиада 2014, 10.4)

Оценка + пример

1. В квадратной таблице размером 100×100 некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

2. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке равна нулю. Какое наименьшее количество чисел, отличных от нуля, может быть в этой таблице, если известно, что оно нечетно?

3. В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение — 0. Назовем команду *успешной,* если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

4. Имеется 24 карандаша четырех цветов — по 6 карандашей каждого цвета. Их раздали 6 ребятам так, что каждый получил по 4 карандаша. Какое наименьшее количество ребят всегда можно выбрать, чтобы у них гарантированно нашлись карандаши всех цветов, вне зависимости от распределения карандашей?

5. У каждого из 1000 гномов есть колпак, синий снаружи и красный внутри (или наоборот). Если на гноме надет красный колпак, то он может только лгать, а если синий — только говорить правду. На протяжении одного дня каждый гном сказал каждому: «На тебе красный колпак!» (при этом некоторые гномы в течение дня выворачивали свой колпак наизнанку). Найдите наименьшее возможное количество выворачиваний.

6. Изначально на столе лежит 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?

7. На окружности выбрано 2012 точек, делящих ее на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

9. На доске нарисован выпуклый 2015-угольник. Петя последовательно проводит в нем диагонали так, чтобы каждая вновь проведенная диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведенных ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

Метод спуска

1. Решите в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$$

2. В последовательности троек целых чисел $(2, 3, 5)$, $(6, 15, 10)$, …каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число умножается на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку. Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т. д.

3. В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

4. Плоскость разбита тремя сериями параллельных прямых на равные между собой равносторонние треугольники. Существуют ли четыре вершины этих треугольников, образующие квадрат?

5. В клетки таблицы $n \times m$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, были неотрицательны.

6. На плоскости дано N точек. Некоторые точки соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

7. В колоде N карт. Часть из них лежит рубашками вверх, остальные рубашками вниз. За один ход разрешается взять несколько карт сверху, перевернуть полученную стопку и снова положить ее сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали рубашками вниз?

8. В стране N 1998 городов и из каждого осуществляются беспосадочные перелеты в три других города. Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.

Таблицы

1. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, чтобы все девять клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.

2. Квадрат 100×100 составлен из прямоугольников размерами 1×2. Докажите, что какие-то два из них образуют квадрат 2×2.

3. Имеется доска 100×100, все клетки которой покрашены в три цвета. Разрешается перекрасить любой квадратик 2×2 в тот цвет, который в нем преобладает, а если такого нет, то в тот цвет, которого нет в квадратике. Докажите, что весь квадрат можно перекрасить в один цвет.

4. В верхнем правом углу доски 8×8 стоит черная фишка. За ход разрешается поставить на любое поле доски белую фишку и перекрасить все фишки, стоящие на полях, соседних с данным (т. е. имеющих с этим полем общую вершину). Можно ли добиться, чтобы вся доска была заполнена белыми фишками?

5. В таблице $n \times n$ расставлены действительные числа. Известно, что любые две строки различаются. Докажите, что можно удалить один столбец так, чтобы все строки опять различались.

6. В клетках таблицы 100×100 записаны натуральные числа. Разрешается удваивать одновременно все числа любого столбца и вычитать по единице из всех чисел любой строки. Докажите, что с помощью таких операций можно получить таблицу из одних нулей.

7. В клетках квадратной таблицы $n \times n$ записаны некоторые числа. Разрешается вместо любых двух чисел записать в обе клетки их среднее арифметическое. Найдите все натуральные числа n, при которых для любой начальной расстановки чисел в таблице такими операциями можно добиться того, чтобы во всех клетках были записаны одинаковые числа.

8. Клетки доски 100×100 окрашены в четыре цвета, причем клетки, окрашенные в один цвет, не имеют общих вершин. Докажите, что клетки в углах доски окрашены в разные цвета.

Комбинаторная геометрия

1. Докажите, что замкнутая ломаная длины 1, расположенная на плоскости, может быть накрыта кругом радиуса $\frac{1}{4}$.

2. Единичный квадрат покрыт n фигурами так, что каждая его точка принадлежит по крайней мере q фигурам. Докажите, что хотя бы одна фигура имеет площадь, не меньшую q/n.

3. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо найдутся два многоугольника с одинаковым числом сторон.

4. Из 106 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, четыре являются вершинами единичного квадрата, а остальные лежат внутри этого квадрата. Докажите, что имеется по крайней мере 107 треугольников с вершинами в этих точках, имеющих площадь не более 0,01.

5. На плоскости даны $2n+3$ точки общего положения, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности. Докажите, что через три из них можно провести окружность, внутри которой лежит ровно n точек из данных.

6. Докажите, что в выпуклом многоугольнике с четным числом сторон есть диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

7. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно покрыть круг радиуса 1,5?

8. Каждая сторона правильного треугольника разбита на 30 равных частей. Прямые, проведенные через точки деления параллельно сторонам треугольников, разбивают его на 900 маленьких треугольников. Каково максимальное количество вершин разбиения, никакие две из которых не лежат на проведенной прямой или стороне?

Принцип крайнего

1. Пусть A — некоторое множество в трехмерном пространстве. Известно, что для любой точки X из множества A найдутся еще две точки Y и Z из этого же множества такие, что X — середина отрезка YZ. Докажите, что в множестве A бесконечно много точек.

2. Существуют ли такие 2015 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2014 из них не меньше квадрата оставшегося?

3. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

4. 8 школьников смотрят 8-серийный сериал. Оказалось, что каждую серию смотрели ровно 5 школьников. Докажите, что найдется такая пара школьников, что каждую серию смотрел хотя бы один из них.

5. У Коли есть отрезок длины k, а у Лёвы — отрезок длины l. Сначала Коля делит свой отрезок на три части, а потом Лёва делит на три части свой отрезок. Если из получившихся шести отрезков можно сложить два треугольника, то выигрывает Лёва, а если нет — Коля. Кто из играющих, в зависимости от отношения $k : l$, может обеспечить себе победу, и как ему следует играть?

6. Докажите, что для любого натурального n число

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$$

не является целым.

7. На плоскости дано n точек. Известно, что площадь треугольника, образованного любыми тремя из них, не превосходит 1. Докажите, что все точки можно поместить в треугольник площади 4.

8. Пусть элементами таблицы $n\times n$ являются нули и единицы. Пусть при этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.

Теория Рамсея — 1: полные подграфы

-3. На плоскости даны 6 точек общего положения, все расстояния между которыми различны. Докажите, что найдутся два треугольника с вершинами в этих точках и с общей стороной, такой что в одном треугольнике она — самая короткая сторона, а в другом — самая длинная.

-2. 17 ученых переписываются по трем дисциплинам. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Докажите, что можно выбрать троих ученых, которые переписываются по одной дисциплине.

-1. Каждое из ребер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что найдутся 4 вершины, все ребра между которыми одного цвета.

---

1. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

2. Все ребра полного графа с бесконечным количеством вершин покрашены в k цветов. Докажите, что найдется бесконечный полный подграф этого графа, все ребра которого покрашены в один и тот же цвет.

3. Назовем тройку людей *хорошей,* если ее можно отправить в поход (так что люди не поссорятся) и *плохой* в противном случае. Докажите, что из бесконечного числа людей можно выбрать 100 человек, так чтобы любая тройка из них была хорошей, либо 100 человек, так чтобы любая тройка из них была плохой.

4. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

5. Пусть в графе не менее чем $(3n-2)$ вершины и не более чем $(3n-2)$ ребра ($n \geqslant 2$). Тогда найдутся n вершин, между которыми нет ребер.

---

6. Пусть в графе более $(m-1)\cdot(n-1)$ вершин, но среди любых m вершин найдутся две, соединенные ребром. Тогда в этом графе встречается любое дерево на n вершинах.

7. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

8. Вершины графа занумерованы натуральными числами от 1 до 10^5, причем каждое натуральное число встречается ровно один раз. Известно, что в этом графе нет циклов из четырех вершин. Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 5 не превосходящих 10^5 натуральных чисел такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

Теория Рамсея — 2: числа Рамсея

Определение чисел Рамсея. Пусть даны числа a, b, k. Наименьшее число n такое, что как бы мы ни покрасили все k-элементные подмножества n-элементного множества в черный и белый цвета, найдется a-элементное подмножество, все k-элементные подмножества которого покрашены в белый цвет, либо найдется b-элементное подмножество, все k-элементные подмножества которого покрашены в черный цвет, называется *числом Рамсея* и обозначается $n = r_k(a, b)$.

1. Найдите **(a)** $r_1(a, b)$; **(b)** $r_2(3, 4)$.

2. Докажите неравенство

$$r_k(a, b) \leqslant r_{k-1}\big(r_k(a-1, b), r_k(a, b-1)\big) + 1\,.$$

Объясните, как из этого неравенства следует существование чисел Рамсея для всех допустимых значений параметров.

3. Докажите, что $r_2(a, b) \leqslant \binom{a+b-2}{a-1}$.

4. Докажите, что $r_2(c, c) \geqslant 2^{c/2}$.

5. **Многоцветная теорема Рамсея.** Существует число $r_k(a, b, c, \ldots, z)$.

6. **Задача Эрдёша.** **(a)** Докажите, что если любые 4 из 5 точек образуют выпуклый четырехугольник, то все 5 образуют выпуклый пятиугольник.
(b) Докажите, что если на плоскости дано много точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то среди них можно выбрать 5, которые являются вершинами выпуклого пятиугольника.

---

7. **Теорема Хватала.** Обозначим: T_k — дерево на k вершинах, а K_k — полный граф на k вершинах. Каждое ребро полного графа на r вершинах покрашено либо в красный, либо в зеленый цвет.
(a) Докажите, что если $r > (m-1)\cdot(n-1)$,

$$\text{то}\quad \left[\begin{array}{l}\text{есть подграф } T_n\text{, все ребра которого красные}\\ \text{есть подграф } K_m\text{, все ребра которого зеленые}\end{array}\right.$$

(b) Приведите пример, в котором $r = (m-1)\cdot(n-1)$,

$$\text{но}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{нет подграфа } T_n\text{, все ребра которого красные}\\ \text{нет подграфа } K_m\text{, все ребра которого зеленые}\end{array}\right.$$

8. Вершины бесконечного графа занумерованы всеми натуральными числами, причем каждое натуральное число является номером ровно одной вершины. Известно, что в этом графе нет двух непересекающихся множеств, по 100 вершин в каждом, таких, что каждая вершина из первого множества соединена с каждой вершиной из второго. Докажите, что существует сколь угодно длинная арифметическая прогрессия такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

Глава 4

Чёрные Ладьи (10-1)

Тренировочная олимпиада

1. Бесконечная последовательность $a_0, a_1, \ldots$ натуральных чисел такова, что $a_n^2 > a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ при любом натуральном n. Докажите, что $a_k > k$ при любом натуральном k.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точка M на прямой BC такова, что $MI \perp AI$. Точка D — основание перпендикуляра из I на AM. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

3. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 50 радиоактивных. Есть прибор, в который за одну операцию можно положить два образца, и если ровно один из них радиоактивен, то прибор укажет на него, а если нет, то на любой из двух образцов. За какое наименьшее количество операций можно найти хотя бы один радиоактивный образец?

4. Докажите, что функция $f(n) = (n^{2015} - n!\,)$ в разных натуральных точках принимает разные значения.

Тригонометрия

1. Докажите, что при всех $x \in (0, \pi/3)$ справедливо неравенство $\sin(2x) + \cos(x) > 1$.

2. Найдите все углы α. для которых набор $\sin(\alpha)$, $\sin(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ совпадает с набором $\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$.

3. Для углов α, β, γ справедливо равенство $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \geqslant 2$. Докажите, что $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leqslant \sqrt{5}$.

4. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b \cdot \cos x$. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

5. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенству $|f(x + y) + \sin(x) + \sin(y)| < 2$?

6. Найдите все пары $x, y \in (0, \pi/2)$, удовлетворяющие равенству $\sin(x) + \sin(y) = \sin(xy)$.

7. Докажите, что для каждого x такого, что $\sin(x) \neq 0$, найдется такое натуральное n, что $|\sin(nx)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Пусть α, β, γ, τ — такие положительные числа, что при всех x выполняется $\sin(\alpha x) + \sin(\beta x) = \sin(\gamma x) + \sin(\tau x)$. Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \tau$.

9. Пусть

$$a_0 = \sqrt{2}\,,\ b_0 = 2\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}\,, \quad b_{n+1} = \frac{2b_n}{2 + \sqrt{4 + b_n^2}}\,.$$

Рассмотрим последовательность $c_n = a_n/b_n$. Найдите c_{2015}.

10. Последовательность чисел $\{h_n\}$ задана условиями

$$h_1 = \frac{1}{2}\,, \quad h_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - h_n^2}}{2}}\,,\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} h_k < 1{,}03$.

Рекуррентные соотношения — 1

1. Последовательность a_n удовлетворяет при любом натуральном n соотношению $a_{n+2} = (a_{n+1}+1)/a_n$. Найдите a_{1998}, если $a_{19} = 19$, $a_{97} = 97$.

2. Докажите, что если

$$u_0 = 0{,}001, \quad u_{n+1} = u_n \cdot (1 - u_n),\ n \geqslant 0\,,$$

то $u_{1000} < 1/2000$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношениям

$$x_1 \in (0;1), \quad x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n(n+1)},\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите, что эта последовательность ограничена.

4. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n},\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите, что $a_n < 2$ при $n \geqslant 1$.

5. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ определим как $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 2$, если такого числа a_{n+1} не встречалось в последовательности, $a_{n+1} = a_n + 3$ в противном случае. Докажите, что любой квадрат натурального числа впервые появится в последовательности увеличением на тройку.

6. Докажите, что если

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n},\ n \geqslant 1\,,$$

то $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-210}$.

7. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n},\ n \geqslant 1.$$

Найдите $[a_{2015}]$.

8. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2},\ n \geqslant 1\,.$$

Докажите, что $a_{2015} > 18$.

9. Последовательность $\{x_n\}$ определена начальным условием $x_1 = 1/2$ и соотношением $x_{n+1} = 1 - x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Докажите, что
(a) $x_{100} > 0{,}99$; **(b)** $x_{100} < 0{,}991$.

10. Последовательность $\{x_k\}$ определена как

$$x_1 = 1, \quad x_{2k} = -x_k, \ x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k \text{ для натуральных } k.$$

Докажите, что $x_1 + \ldots + x_n \geqslant 0$ для всех натуральных n.

Рекуррентные соотношения — 2

1. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно как

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),\ n \geqslant 2\,.$$

Найдите a_{2013}.

2. Найдите a_n, если

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + 3^n \cdot a_n},\ n \geqslant 1\,.$$

3. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, заданная как

$$a_1 = 2013, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n^3 \cdot a_n},\ n \geqslant 1\,.$$

Найдите a_{2013}.

4. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2m \cdot a_{m-1} + 1},\ m > 1.$$

Найдите значение выражения $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

5. Последовательность a_n определена следующим образом:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{a_{n-1}}\,.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

6. Последовательность $\{u_n\}$ определена как

$$u_1 > \frac{1}{2},\ u_2 = 2u_1, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2u_{n+1}^2}{2u_n}\,.$$

Докажите, что $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} < 4$.

7. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n \cdot a_{n-1}}{a_{n-2}},\ n \geqslant 3\,.$$

Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

8. Пусть $\{x_n\}$, $n \geqslant 1$, — последовательность, заданная как

$$x_1 = 1, \quad 2x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}\,.$$

Докажите, что последовательность состоит только из натуральных чисел.

9. Последовательность $\{x_n\}$ задана как

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1} \cdot x_{n-2} + x_{n-2}^2}{x_{n-3}}, \; n \geqslant 4.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

10. Последовательность $\{a_n\}$ определена как

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot a_n + 1\,.$$

Найдите все натуральные k, при которых все члены последовательности a_n — целые.

Первообразные корни

Определение. Если $(a, m) = 1$ и показатель числа a по модулю m равен $\varphi(m)$, то a называется *первообразным корнем* по модулю m.

Замечание. Тем самым, $a = a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$ — это *все* вычеты, взаимно простые с m.

Упражнение. Докажите, что точный квадрат натурального числа не может быть первообразным корнем ни по какому простому нечетному модулю.

1. Пусть по модулю m существует первообразный корень.
   (a) Сколько существует остатков a, для которых $a^d \equiv 1 \pmod{m}$?
   (b) А сколько существует первообразных корней по модулю m?

Напоминание. Над $\mathbb{Z}_p$ многочлен степени $d \neq 0$ имеет не более d корней.

2. **(a)** Докажите, что $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ (для этого рассмотрите дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ и подсчитайте их количество).
   Далее, пусть p — простое.
   (b) Докажите, что для любого d существует не более d остатков по модулю p с показателем, делящим d.
   (c) Докажите, что для $d \mid (p-1)$ существует ровно d остатков по модулю p с показателем, делящим d.
   (d) Докажите, что для $d \mid (p-1)$ существует ровно $\varphi(d)$ остатков по модулю p с показателем d (в частности, $\varphi(p-1) > 0$, поэтому первообразные корни по простому модулю существуют).

3. Пусть $p = 3k + 1$ — простое.
   (a) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет три решения.
   (b) Докажите, что для любого остатка a сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ либо не имеет решений, либо имеет три решения. А для скольких остатков a такое сравнение имеет решение?

4. **(a)** Докажите, что числа $1, 2, \ldots, (p-1)$ можно расставить по окружности так, что квадрат любого числа будет сравним по модулю p с произведением его соседей.
   (b) Для каждого натурального d найдите $\sum_{n=0}^{p-1} n^d \pmod{p}$.
   (c) При помощи первообразных корней докажите, что $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

5. **(a)** **Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ — разложение m на простые множители. Докажите, что для любого a, взаимно простого с m, выполняется сравнение
$$a^x \equiv 1 \pmod{m}, \quad \text{где } x = \text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \varphi(p_n^{\alpha_n})\big).$$
   (b) Докажите, что если натуральное m делится на два различных простых нечетных числа или же на простое нечетное число и на 4, то по модулю m первообразного корня не существует.

(c) Докажите, что для нечетного простого p и натуральных u, r (u не делится на p) число $(1+pu)^{p^r}-1$ делится на p^{r+1}, но не делится на p^{r+2}.

(d) Пусть g — первообразный корень по модулю простого нечетного p. Докажите, что хотя бы одно из чисел g и $g+p$ является первообразным корнем по модулю p^α для любого α.

(e) Пусть g — первообразный корень по модулю p^α. Докажите, что одно из чисел g и $g+p^\alpha$ является первообразным корнем по модулю $2p^\alpha$.

(f) Докажите, что первообразные корни существуют только по модулям $1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ (где p — простое нечетное число).

6. Докажите, что для каждого натурального n найдется натуральное m такое, что $3^n \mid 2^m+2015$.

7. Андрей задумал s натуральных чисел и выписал на доску все их попарные суммы, в том числе суммы числа с самим собой. Для какого наибольшего s могло оказаться так, что все выписанные числа дают разные остатки по модулю (p^2-p), где p — простое?

Показатели

Определение. Натуральное число d называется *показателем числа a по модулю m*, если d является наименьшим натуральным числом таким, что $a^d \equiv 1 \pmod{m}$. Из теоремы Эйлера следует, что если $(a, m) = 1$, то такой показатель d существует. Если же $(a, m) > 1$, то такого d не существует.

1. Числа a, m, l — натуральные, $(a, m) = 1$. Докажите, что $a^l \equiv 1 \pmod{m}$ равносильно тому, что $d \mid l$.

В частности, из этой задачи следует, что показатель числа a по модулю m делит $\varphi(m)$.

2. Пусть $p = 3k + 2$ — простое.
(a) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет единственное решение.
(b) Докажите, что для любого остатка a сравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ имеет единственное решение.

3. Пусть p — простое, $p > 2$.
(a) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(b) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p + 1$, больший 3, представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(c) Докажите, что любой простой делитель числа $2^p + 3^p$, больший 5, представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
(d) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что любой делитель числа $2^{2^n} + 1$ представим в виде $2^{n+1} \cdot k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

4. Пусть p — простое. Докажите, что у числа $(p^p - 1)$ есть простой делитель, дающий остаток 1 при делении на p.

5. Докажите, что для любых натуральных a и n, больших единицы, справедливо $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

6. Найдите все пары (p, q) простых чисел таких, что $pq \mid (7^p - 2^p) \cdot (7^q - 2^q)$.

7. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $pq \mid 5^p + 5^q$.

8. Найдите все натуральные n такие, что $n \mid (2^n - 1)$.

9. Найдите все натуральные n, для которых числа n и $2^n + 1$ имеют один и тот же набор простых делителей.

10. Для натурального a обозначим через P_a множество всех простых чисел, не являющихся делителями ни одного из чисел вида $(2^{k\cdot 2^a} - 1)$, где k — нечетное натуральное число. Докажите, что при любом натуральном a множество P_a бесконечно.

11. Натуральное n таково, что число $4^n + 2^n + 1$ — простое. Докажите, что n — степень тройки.

12. Найдите все натуральные n такие, что $n^2 \mid 2^n + 1$.

Суперпозиция многочленов

1. Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

2. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ также не имеет вещественных корней.

3. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение
$$f(f(f(x))) = 0$$
имеет 7 различных корней?

4. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2001$ действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001) > 1/64$.

6. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

7. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение
$$f(g(h(x))) = 0$$
иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

8. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что $f(f(x)) = x$ не может иметь ровно три действительных корня.

Неравенство Йенсена

Определение. Функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[a;b]$, если для любых $x, y \in [a;b]$ и любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, выполняется $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \leqslant \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$. Функция f называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a;b]$, если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$.

Теорема. Если для всех $x \in (a;b)$ выполняется $f''(x) \geqslant 0$, то функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$. Если для всех $x \in (a;b)$ выполняется $f''(x) \leqslant 0$, то функция f выпукла вверх на отрезке $[a;b]$.

1. **Неравенство Йенсена.** Пусть функция f выпукла вниз на отрезке $[a;b]$,

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a;b], \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1\,.$$

Тогда справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_n \cdot x_n) \leqslant \alpha_1 \cdot f(x_1) + \dots + \alpha_n \cdot f(x_n)\,.$$

Для выпуклой вверх функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$.

2. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0;\pi]$. Докажите неравенство

$$\frac{\sin(x_1) + \dots + \sin(x_n)}{n} \leqslant \sin\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)\,.$$

3. *Неравенство Коши.* Используя неравенство Йенсена для $y = \ln x$, докажите для неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$ неравенство:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}\,.$$

4. *Неравенство о среднем степенном.* Используя неравенство Йенсена для $y = x^\alpha$, докажите для $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0$, $\alpha > 1$ неравенство:

$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\,.$$

5. *Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.* Используя неравенство Йенсена для $y = \frac{1}{x}$, докажите:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2\,.$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\,.$$

7. Пусть α, β, γ — углы некоторого треугольника (возможно, вырожденного). Какие значения может принимать величина
(a) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)$; **(b)** $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)$?

8. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64\,.$$

9. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leqslant \left(\frac{a}{c}\right)^{a} \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^{b}\ .$$

10. Числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$\sqrt{a} \cdot (a + c - b) + \sqrt{b} \cdot (a + b - c) + \sqrt{c} \cdot (b + c - a) \leqslant \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a + b + c)}\,.$$

11. Докажите, что для $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \ldots + \frac{1}{1 + x_n} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}\ .$$

Карамата решает задачи из Прасолова

В треугольнике соответствующие стороны равны a, b, c, углы (в радианах) равны α, β, γ, высоты — h_a, h_b, h_c, радиусы вневписанных окружностей — r_a, r_b, r_c, а радиус вписанной окружности — r.

Докажите неравенства:

1. $\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)>1$.

2. $1<\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\leqslant\frac{3}{2}$.

3. $\operatorname{ctg}(\alpha)+\operatorname{ctg}(\beta)+\operatorname{ctg}(\gamma)\geqslant\sqrt{3}$.

4. Для остроугольного треугольника: $\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)+\operatorname{tg}(\gamma)\geqslant 3\sqrt{3}$.

5. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

6. $\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)\geqslant\frac{3}{4}$.

7. Для тупоугольного треугольника: $\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)>1$.

8. Для остроугольного треугольника:
$\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)\leqslant\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)$.

9. $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma)+\cos(\gamma)\cdot\cos(\alpha)\leqslant\frac{3}{4}$.

10. $h_a+h_b+h_c\geqslant 9r$.

11. $\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}\geqslant 3$.

12. $\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{a\cdot\alpha+b\cdot\beta+c\cdot\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

Неравенство Шура

1. Пусть x, y, z — неотрицательные действительные числа. Докажите, что для любого r верно неравенство

$$\sum_{\text{cyclic}} x^r(x-y)(x-z) \geqslant 0\,.$$

2. Опровергните утверждение. Пусть $a, b, c, d \geqslant 0$, $r > 0$, тогда

$$a^r(a-b)(a-c)(a-d) + b^r(b-a)(b-c)(b-d) + \\ + c^r(c-a)(c-b)(c-d) + d^r(d-a)(d-b)(d-c) \geqslant 0\,.$$

3. Докажите неравенство для неотрицательных чисел x, y, z

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y\,.$$

4. Докажите для неотрицательных x, y, z неравенство

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant 2\big((xy)^{3/2} + (yz)^{3/2} + (zx)^{3/2}\big)\,.$$

5. Докажите, что для положительных чисел a, b, c верно неравенство

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca)\,.$$

6. Пусть $t \in (0; 3]$. Докажите, что для неотрицательных a, b, c верно неравенство

$$(3-t) + t(abc)^{2/t} + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ab+bc+ca)\,.$$

7. Для положительных a, b, c, таких, что $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leqslant 1\,.$$

8. Докажите, что для углов остроугольного треугольника верно неравенство

$$\operatorname{ctg}^3(\alpha) + \operatorname{ctg}^3(\beta) + \operatorname{ctg}^3(\gamma) + 6\operatorname{ctg}(\alpha)\operatorname{ctg}(\beta)\operatorname{ctg}(\gamma) \geqslant \\ \geqslant \operatorname{ctg}(\alpha) + \operatorname{ctg}(\beta) + \operatorname{ctg}(\gamma)\,.$$

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \geqslant \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{3}\,.$$

10. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geqslant a^3 + b^3 + c^3 + 2abc\,.$$

11. Докажите для всех неотрицательных $x_1, \dots, x_n$

$$(n-1)(x_1^n + \dots + x_n^n) + nx_1 \dots x_n \geqslant (x_1 + \dots + x_n)(x_1^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})\,.$$

12. Пусть a, b, c — положительные числа, такие, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

Независимость (геометрия)

1. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника BMK не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

2. На биссектрисе угла с вершиной O взята точка P. Прямая, проходящая через P, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что величина $1/OM + 1/ON$ не зависит от выбора прямой.

3. Две окружности пересекаются в точке A. Проходящая через A прямая пересекает их в точках B и C. Докажите, что угол между касательными в точках B и C не зависит от прямой.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Произвольный луч ℓ, выходящий из вершины B, пересекает отрезок AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC — в точке L. Докажите, что описанная окружность треугольника DKL проходит через фиксированную точку, отличную от D и не зависящую от выбора луча ℓ.

5. Дана окружность ω и точка P вне нее. Проходящая через P прямая ℓ пересекает ω в точках A и B. На отрезке AB отмечена точка C такая, что $PA \cdot PB = PC^2$. Точки M и N — середины двух дуг, на которые хорда AB разбивает окружность ω. Докажите, что величина $\angle MCN$ не зависит от выбора прямой ℓ.

6. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AX/BX = CY/DY$.

7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие S_2 в точках B и C, а через точку D окружности S_2 — прямые DM и DN, пересекающие S_1 в точках E и F, причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C — по другую. Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D.

8. В ромб $ABCD$ вписана окружность ω. Прямая ℓ касается ω и пересекает стороны AB и AD в точках K и L, а продолжения сторон BC и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что произведение площадей треугольников AKL и CMN не зависит от положения прямой ℓ.

9. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC взята произвольная точка P. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABP и CBP. Докажите, что описанная окружность треугольника I_1I_2P проходит через некоторую фиксированную точку, не зависящую от выбора P.

Изогональное сопряжение

1. **(a)** Докажите, что точка пересечения высот и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.
(b) Докажите, что изогонально сопряжены точка, из которой стороны треугольника видны под углом 120° *(точка Торричелли)* и точка, проекции которой на стороны треугольника образуют равносторонний треугольник *(изодинамический центр треугольника)*.
(c) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.
(d) Докажите, что изогонально сопряжены точка пересечения медиан треугольника и точка, для которой сумма квадратов расстояний до его сторон минимальна (точка Лемуана).

2. **(a)** Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Пусть x, y и z — расстояния от точки P до прямых BC, CA и AB соответственно, а x', y' и z' — расстояния от точки Q до прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $x \cdot x' = y \cdot y' = z \cdot z'$.
(b) Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Докажите, что эта окружность совпадает с окружностью, построенной таким же образом для точки Q.
(c) Выведите из пункта 2b, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности.

3. **(a)** В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Отрезок AC пересекается с отрезком BF в точке X, BE с AD — в точке Y, CE и DF — в точке Z. Докажите, что треугольники ABY и EDY подобны, причем точке, изогонально сопряженной точке X в треугольнике ABY соответствует точка Z в треугольнике EDY.
(b) Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

4. Ортоцентр H остроугольного треугольника ABC отразили относительно сторон и получили треугольник $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ в пересечении образуют шестиугольник. Докажите, что его диагонали пересекаются в одной точке.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что углы $\angle BSC$ и $\angle ASD$ равны.

6. На меньшей дуге AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. На стороне AC нашлась такая точка E, что $DE = AE$. На прямой, параллельной AB, проходящей через E, отмечена точка F такая, что $CF = BF$. Докажите, что точки D, E, C, F лежат на одной окружности.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается прямых AB

и CD в точках X и Y и пересекает дугу AD окружности ω в точках K и L. Прямая XY пересекает AC и BD в точках Z и T. Докажите, что K, L, Z и T лежат на одной окружности, касающейся прямых AC и BD.

8. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C, отличная от описанной, переходит в окружность, проходящую через B и C.

Повторение (геометрия)

1. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC; отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — высоты. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X, а прямые MC_1 и AC — в точке Y. Докажите, что $XY \parallel BC$.

2. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B. Прямая I_aH пересекает BC в точке A', а прямая I_cH пересекает AB в точке C'. Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Дан треугольник ABC и точка P. Прямая ℓ_A проходит через проекции точки P на сторону BC и высоту из вершины A. Аналогично определяются прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C пересекаются в одной точке.

4. Окружность касается сторон треугольника AB и BC треугольника ABC в точках D и E, а также внутренним образом описанной окружности треугольника. Докажите, что DE проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

5. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. M — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках M_1 и M_2, и окружности, описанные около треугольников ABM и CDM, в точках N_1 и N_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

Дополнительная окружность

1. На плоскости даны прямая ℓ и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой ℓ выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

2. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

4. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, отличной от B. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что угол BKO — прямой.

5. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

7. На сторонах AP и PD остроугольного треугольника APD выбраны соответственно точки B и C. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. Точки H_1 и H_2 являются ортоцентрами треугольников APD и BPC соответственно. Докажите, что если прямая H_1H_2 проходит через точку X пересечения описанных окружностей треугольников ABQ и CDQ, то она проходит и через точку Y пересечения описанных окружностей треугольников BQC и AQD.

Таблицы

1. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит фишку в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую фишку на какую-то клетку, либо переставить фишку из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда фишка попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить фишку на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество фишек потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

2. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

3. В каждой клетке квадратной таблицы $m \times m$ клеток стоит либо натуральное число, либо нуль. При этом, если на пересечении строки и столбца стоит нуль, то сумма чисел в «кресте», состоящем из этой строки и этого столбца, не меньше m. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше, чем $m^2/2$.

4. В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

5. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в каждой строке и в каждом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, все четыре клетки на пересечении которых окрашены в разные цвета.

6. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не менее $(n + m - 1)$ чисел.

7. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец, так что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

8. **(a)** Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, обладающая следующим свойством: ни один член последовательности не равен сумме нескольких других и $a_n \leqslant n^{10}$ при любом n?
   (b) Тот же вопрос, если $a_n \leqslant n\sqrt{n}$ при любом n.

Инварианты

1. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

2. На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

3. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета ее соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета ее бывших соседей. Пусть первоначально было всего две красные точки (менее двух точек оставлять не разрешается). Доказать, что за несколько разрешенных операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

4. На доске написаны три функции:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = (x-1)^2.$$

Можно складывать, вычитать и перемножать эти функции (в том числе возводить в квадрат, в куб, ...), умножать их на произвольное число, прибавлять к ним произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями. Получите таким образом функцию $1/x$. Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $1/x$ невозможно.

5. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1. Снять по одному камню с клеток $(n-1)$ и n и положить один камень в клетку $(n+1)$;
2. Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $(n+1)$, $(n-2)$.

(a) Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя.
(b) Докажите, что эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

Комбинаторная геометрия

1. В квадрате со стороной 15 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно разместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.

2. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежат не менее 10 из данных точек.

3. На окружности отметили n точек, разбивающие ее на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n новых точек, разбивающих окружность на n новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)

4. На координатной плоскости нарисовано n парабол, являющихся графиками квадратных трехчленов, никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более $2(n-1)$ углов (то есть точек пересечения пары парабол).

5. На доске нарисован выпуклый 2015-угольник. Петя последовательно проводит в нем диагонали так, чтобы каждая вновь проведенная диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведенных ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

6. На плоскости отмечено несколько точек, каждая покрашена в синий, желтый или зеленый цвет. На любом отрезке, соединяющем одноцветные точки, нет точек этого же цвета, но есть хотя бы одна другого цвета. Каково максимально возможное число всех точек?

7. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

Принцип крайнего

1. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо некоторые 8 отрезков имеют общую точку, либо найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

2. Пусть A — некоторое множество в трехмерном пространстве. Известно, что для любой точки X из множества A найдутся еще две точки Y и Z из этого же множества такие, что X — середина отрезка YZ. Докажите, что в множестве A бесконечно много точек.

3. Круг поделен n диаметрами на $2n$ равных секторов, из которых n красных и n синих. В красные сектора, начиная с некоторого, подряд по часовой стрелке расставляются числа $1, 2, \dots, n$; в синие сектора, начиная с некоторого, также подряд расставляются числа $1, 2, \dots, n$, но против часовой стрелки. Докажите, что найдется диаметр, по каждую сторону от которого встречаются числа $1, 2, \dots, n$ ровно по одному разу.

4. Докажите, что для любого натурального n число
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$
не является целым.

5. 8 школьников смотрят 8-серийный сериал. Оказалось, что каждую серию смотрели ровно 5 школьников. Докажите, что найдется такая пара школьников, что каждую серию смотрел хотя бы один из них.

6. На плоскости дано n точек. Известно, что площадь треугольника, образованного любыми тремя из них, не превосходит 1. Докажите, что все точки можно поместить в треугольник площади 4.

7. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y) \cdot \big(Q(x) - Q(y)\big)$. Докажите, что существует такой многочлен $S(x)$, что $P(x) = S\big(Q(x)\big)$.

8. Пусть элементами таблицы $n \times n$ являются нули и единицы. Пусть при этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.

Теория Рамсея — 1: полные подграфы

-3. На плоскости даны 6 точек общего положения, все расстояния между которыми различны. Докажите, что найдутся два треугольника с вершинами в этих точках и с общей стороной, такой что в одном треугольнике она — самая короткая сторона, а в другом — самая длинная.

-2. 17 ученых переписываются по трем дисциплинам. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Докажите, что можно выбрать троих ученых, которые переписываются по одной дисциплине.

-1. Каждое из ребер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что найдутся 4 вершины, все ребра между которыми одного цвета.

---

1. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

2. Все ребра полного графа с бесконечным количеством вершин покрашены в k цветов. Докажите, что найдется бесконечный полный подграф этого графа, все ребра которого покрашены в один и тот же цвет.

3. Назовем тройку людей *хорошей,* если ее можно отправить в поход (так что люди не поссорятся) и *плохой* в противном случае. Докажите, что из бесконечного числа людей можно выбрать 100 человек, так чтобы любая тройка из них была хорошей, либо 100 человек, так чтобы любая тройка из них была плохой.

4. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

5. Пусть в графе не менее чем $(3n-2)$ вершины и не более чем $(3n-2)$ ребра ($n \geqslant 2$). Тогда найдутся n вершин, между которыми нет ребер.

---

6. Пусть в графе более $(m-1)\cdot(n-1)$ вершин, но среди любых m вершин найдутся две, соединенные ребром. Тогда в этом графе встречается любое дерево на n вершинах.

7. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

8. Вершины графа занумерованы натуральными числами от 1 до 10^5, причем каждое натуральное число встречается ровно один раз. Известно, что в этом графе нет циклов из четырех вершин. Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 5 не превосходящих 10^5 натуральных чисел такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

Теория Рамсея — 2: числа Рамсея

Определение чисел Рамсея. Пусть даны числа a, b, k. Наименьшее число n такое, что как бы мы ни покрасили все k-элементные подмножества n-элементного множества в черный и белый цвета, найдется a-элементное подмножество, все k-элементные подмножества которого покрашены в белый цвет, либо найдется b-элементное подмножество, все k-элементные подмножества которого покрашены в черный цвет, называется *числом Рамсея* и обозначается $n = r_k(a, b)$.

1. Найдите **(a)** $r_1(a, b)$; **(b)** $r_2(3, 4)$.

2. Докажите неравенство

$$r_k(a, b) \leqslant r_{k-1}\big(r_k(a-1, b), r_k(a, b-1)\big) + 1\,.$$

Объясните, как из этого неравенства следует существование чисел Рамсея для всех допустимых значений параметров.

3. Докажите, что $r_2(a, b) \leqslant \dbinom{a+b-2}{a-1}$.

4. Докажите, что $r_2(c, c) \geqslant 2^{c/2}$.

5. **Многоцветная теорема Рамсея.** Существует число $r_k(a, b, c, \dots, z)$.

6. **Задача Эрдёша.** **(a)** Докажите, что если любые 4 из 5 точек образуют выпуклый четырехугольник, то все 5 образуют выпуклый пятиугольник.
(b) Докажите, что если на плоскости дано много точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то среди них можно выбрать 5, которые являются вершинами выпуклого пятиугольника.

---

7. **Теорема Хватала.** Обозначим: T_k — дерево на k вершинах, а K_k — полный граф на k вершинах. Каждое ребро полного графа на r вершинах покрашено либо в красный, либо в зеленый цвет.
(a) Докажите, что если $r > (m-1)\cdot(n-1)$,

$$\text{то}\quad \left[\begin{array}{l}\text{есть подграф } T_n\text{, все ребра которого красные}\\ \text{есть подграф } K_m\text{, все ребра которого зеленые}\end{array}\right.$$

(b) Приведите пример, в котором $r = (m-1)\cdot(n-1)$,

$$\text{но}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{нет подграфа } T_n\text{, все ребра которого красные}\\ \text{нет подграфа } K_m\text{, все ребра которого зеленые}\end{array}\right.$$

8. Вершины бесконечного графа занумерованы всеми натуральными числами, причем каждое натуральное число является номером ровно одной вершины. Известно, что в этом графе нет двух непересекающихся множеств, по 100 вершин в каждом, таких, что каждая вершина из первого множества соединена с каждой вершиной из второго. Докажите, что существует сколь угодно длинная арифметическая прогрессия такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

Глава 5

Белые Слоны (11-2)

Тренировочная олимпиада

1. Пусть M — конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

2. Совершенное число, большее 6, делится на 3. Докажите, что оно делится на 9. (Натуральное число называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа; например, $6 = 1 + 2 + 3$.)

3. Дан прямоугольный треугольник ABC, где $\angle A = 90^\circ$. В нем проведены медианы BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке M. На лучах BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 взяты такие точки B_2 и C_2 соответственно, что $\angle CC_2A = \angle ACB$ и $\angle BB_2A = \angle ABC$. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников CB_2M и BC_2M, пересекаются на прямой BC (в точке, отличной от M).

4. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $(2n - 2)$ гвоздями.

Показатели

Определение. При $(a, m) = 1$ существует натуральное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod{m}$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем a по модулю m*.

1. В обозначениях из предыдущего определения:
(a) Числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ попарно несравнимы по модулю m.
(b) $a^s \equiv a^t \pmod{m}$ $(s, t \geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod{\delta}$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod{m}$ тогда и только, когда s делится на δ.
(c) Число δ является делителем $\varphi(m)$.

---

2. Найдите все простые p и q такие, что $(2^p - 1)$ делится на q, а $(2^q - 1)$ делится на p.

3. Докажите, что для любого натурального n простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

4. Докажите, что для любого натурального $a > 1$ количество правильных несократимых дробей со знаменателем $(a^n - 1)$ кратно n.

5. p, q — простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q \mid 2^p + 3^p$, то $q > p$.

6. Докажите, что $(2^n - 1)$ не делится на n при натуральном $n > 1$.

7. Пусть $a > 1$, $p > 2$, p — простое.
(a) Докажите, что простые нечетные делители числа $(a^p - 1)$ или делят $(a - 1)$, или имеют вид $2px + 1$.
(b) Докажите, что число $(a^p - 1)/(a - 1)$ имеет хотя бы один простой множитель, не являющийся делителем $(a - 1)$.
(c) Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

8. Известно, что число $2^{32} + 1$ раскладывается на простые множители как $641 \cdot 6700417$. Докажите, что существует такое натуральное k, что для любого натурального n число $k2^n + 1$ будет составным.

Теория чисел

1. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n. Зададим последовательность $a_{n+1} = S(a_n)$, $a_0 = 2^{1000000}$. Найдите a_6.
2. Сколько простых чисел содержится в последовательности $101, 10101, 1010101, \ldots$?
3. Найдите все такие n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.
4. Докажите, что для любого многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ и любого натурального k, существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.
5. Дано натуральное число c и последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ такая, что $p_i + c$ делится на p_{i+1}. Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.
6. Докажите, что $\varphi(2^n - 1)$ делится на n.
7. Число N, не кратное 81 представимо в виде суммы квадратов трех чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно представимо в виде суммы квадратов трех чисел, не делящихся на 3.
8. Докажите, что для любого натурального n число $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}, и не делится на 3^{n+2}.
9. **(a)** Дано простое число p и натуральное a. Докажите, что любой простой делитель числа $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$ либо равен p, либо имеет вид $pk + 1$.
   (b) Докажите, что простых чисел вида $pk + 1$ бесконечно много.

Многочлены

1. Найдите все a, при которых многочлены x^4+ax^2+1 и x^3+ax+1 имеют общий корень.

2. В выражении $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2014}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

3. Исходно на доске написано (x^3-3x^2+5) и (x^2-4x). Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то разрешается дописать любые из многочленов
$$f(x)+g(x),\ \ f(x)-g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \ f(g(x)),\ \ c\cdot f(x)\,,$$
где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких таких операций появиться многочлен вида (x^n-1)?

4. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x,y)$ такого, что $P(x,y)>0$ тогда и только тогда, когда $x>0$ и $y>0$.

5. Пусть для некоторых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ выполнено равенство
$$x^{2014}=(x^3-6x^2+11x-6)\cdot P(x)+Q(x)\,,$$
где степень $Q(x)$ не превосходит 2. Докажите, что все коэффициенты $P(x)$ положительны.

6. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что среди его коэффициентов есть отрицательные, а у $(P(x))^n$ все коэффициенты положительны для любого натурального $n>1$?

7. Докажите, что если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех действительных x неотрицательные значения, то он представим в виде $P(x)=Q_1^2(x)+\ldots+Q_m^2(x)$, где $Q_1(x),\ldots,Q_m(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами.

8. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет следующим свойствам: $P(0)=1$, $P^2(x)=1+x+x^{100}\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$ равен нулю.

Планиметрический разнобой

1. В треугольнике ABC отметили центр O описанной окружности и среднюю линию MN, параллельную BC. Точка X такова, что $OMXN$ — параллелограмм. Докажите, что $AX \perp BC$.

2. На сторонах AB и AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 + CB_1 = BC$. Докажите, что середина отрезка B_1C_1 лежит на прямой, проходящей через точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB и AC.

3. Точки O и I — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и OIB, пересекаются в точках B и D. Докажите, что прямая AD касается окружности, описанной около треугольника OIB.

4. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведена общая касательная, касающаяся их в точках A и B соответственно. Окружность, построенная на AB как на диаметре, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках D и C соответственно. Докажите, что AC и BD пересекаются на линии, соединяющей центры ω_1 и ω_2.

5. В неравнобедренный треугольник ABC вписана окружность с центром I, касающаяся его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AIA_1, BIB_1, CIC_1 имеют общую хорду.

6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную ко второй окружности, восстановленную в точке Q, в точке X. Докажите, что углы PXQ и O_1XO_2 имеют общую биссектрису.

7. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая ℓ пересекает первую из них в точках A и B, вторую — в C и D, причем точки на прямой в указанном порядке и P и Q лежат в одной полуплоскости относительно ℓ; P ближе к ℓ, чем Q. Оказалось, что $AB = CD$. Докажите, что $PB \cdot QD = QA \cdot PC$.

8. В остроугольном треугольнике ABC отметили середины B_0 и C_0 меньших дуг AC и AB описанной окружности соответственно, I — центр вписанной в треугольник окружности. Окружности ω_B и ω_C имеют центры B_0 и C_0 и касаются сторон AC и AB соответственно. Докажите, что I лежит на одной из общих внешних касательных к ω_B и ω_C.

9. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AC и AB в точка B_1 и C_1 соответственно. Точка K на отрезке B_1C_1 такова, что $IK \perp BC$. Докажите, что прямая AK делит BC пополам.

Гомотетия

1. На плоскости даны два неравных треугольника с параллельными соответственными сторонами. Докажите, что существует гомотетия, переводящая один треугольник в другой.

2. Дан треугольник ABC. Вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Вневписанная окружность касается отрезка BC в точке L. Точка K' лежит на вписанной окружности и диаметрально противоположна точке K. Точка L' лежит на вневписанной окружности и диаметрально противоположна точке L. Докажите, что прямые $K'L$ и KL' пересекаются в точке A.

3. В треугольнике ABC из середины стороны BC провели вторую касательную к вписанной окружности треугольника, точку касания обозначили K. Прямая AK пересекает BC в точке L. Докажите, что L — точка касания вневписанной окружности со стороной BC.

4. Точку L касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC соединили линией с центром I вписанной окружности. Докажите, что линия проходит через середину высоты, опущенной из A на BC.

5. Внутри треугольника ABC нарисованы четыре круга одинакового радиуса: ω_A, ω_B, ω_C и s, причем каждый из кругов ω_i касается двух сторон треугольника и s. Докажите, что центр круга s принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

6. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. H — точка пересечения высот. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точке H относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

7. Середины высот треугольника соединили прямыми с соответствующими центрами вневписанных окружностей. Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

8. Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника ABC к точками B и C пересекаются в точке P. M — середина BC; A_1, B_1, C_1 — основания понятно каких высот, H — ортоцентр. Докажите, что MH, PA_1, B_1C_1 пересекаются в одной точке.

9. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Лучи AB, DC пересекаются в точке X. P — точка касания вписанной окружности треугольника XBC с отрезком BC. Q — точка касания вневписанной окружности треугольника XAD с отрезком AD. Оказалось, что прямая PQ проходит через X. M и N — середины BC и AD. Докажите, что M, N, I лежат на одной прямой.

Радикальные оси

1. **(a)** Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам коллинеарны.
   (b) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

2. **(a)** Точки A_1 и A_2 лежат на стороне BC, B_1 и B_2 — на стороне AC, C_1 и C_2 — на стороне AB. Известно, что точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат на одной окружности; B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности; C_1, C_2, A_1, A_2 лежат на одной окружности. Докажите, что все 6 точек лежат на одной окружности.
   (b) Пользуясь предыдущим пунктом, докажите существование *окружности Эйлера*: докажите, что основания высот и медиан любого треугольника лежат на одной окружности.

3. Высоты AA' и CC' треугольника ABC пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка X со свойством, что $\angle HXB = 90^\circ$. Докажите, что прямые BX, AC и $A'C'$ пересекаются в одной точке.

4. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

5. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY, такие что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей,описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

6. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Перпендикуляр, восстановленный в точке I к отрезку AI, пересекает прямую BC в точке P. Точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из I на AP. Докажите, что Q лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На отрезке CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности, и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.

8. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки и касающуюся данной прямой.

На поляне трилистников

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

2. A_1 и B_1 — середины дуг BC и AC окружности ω. С центрами в этих точках построили окружности, касающиеся ближайших сторон треугольника. Докажите, что одна из общих внешних касательных к этим окружностям проходит через I.

3. Точки K, L, M и N — точки пересечения внешних биссектрис углов A и B, B и C, C и D, D и A выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно. Оказалось, что описанные окружности треугольников ABK и CDM касаются. Докажите, что описанные окружности треугольников CBL и DAN тоже касаются.

4. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

5. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$.
   (a) Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC образуют прямоугольник.
   (b) Докажите, что его стороны параллельны биссектрисам углов между диагоналями.

7. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

8. **(a)** *Лемма Архимеда.* В окружности ω проведена хорда AB. Окружность γ касается ω в точке P и AB в точке Q; M — середина дуги AB. Докажите, что P, Q и M лежат на одной прямой.
   (b) На окружности расположены точки A, B, C и D. Обозначим через K середину дуги AB, не содержащей точек C и D. Прямые CK и DK пересекают прямую AB в точках M и N. Докажите, что точки M, N, C и D лежат на одной окружности.
   (c) Обозначим основание внешней биссектрисы угла C через P. Докажите, что существует окружность, касающаяся AB в точке P, а описанной окружности треугольника ABC в точке C.
   (d) В обозначениях пункта 8a докажите, что касательная из точки M к γ равна MA.

Стереометрия

1. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей ее основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются ее грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

3. Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'.

4. В тетраэдре $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, DB, BC пополам. Докажите, что плоскости BCD и $B'C'D'$ параллельны.

5. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот, а также точки, делящие остальные высоты в отношении $2:1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

6. Точка O — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.

7. В пространстве даны прямая l и точка A, не лежащая не ней. XY — общий перпендикуляр к прямой l и произвольной прямой AY (X лежит на l). Найдите ГМТ Y по всем возможным прямым, проходящим через A.

8. На боковых ребрах SA, SB и SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки S, A, B и C_1. Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости A_1B_1C.

Добавка по стереометрии

1. Сфера ω проходит через вершину S неправильной пирамиды $SABC$ и пересекает ребра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Окружность пересечения сферы ω с описанной сферой Ω пирамиды $SABC$ лежит в плоскости, параллельной плоскости ABC. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин ребер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

2. В тетраэдре провели четыре отрезка, соединяющие вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней. Докажите, что если два таких отрезка пересекаются, то два других тоже.

3. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противолежащего бокового ребра под прямым углом?

4. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. Точка O — основание высоты четырехугольной пирамиды. Сфера с центром O касается всех боковых граней пирамиды. Точки A, B, C и D взяты последовательно на боковых ребрах пирамиды так, что отрезки AB, BC и CD проходят через три точки касания сферы с гранями. Докажите, что отрезок AD проходит через четвертую точку касания.

Игры

1. Прямоугольная полоса размером $1 \times n$ ($n \geqslant 4$) составлена из единичных полей, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. На полях с номерами $(n-2)$, $(n-1)$, n стоит по одной фишке. Двое играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом может перенести любую фишку на любое свободное поле с меньшим номером. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Двое игроков отмечают точки на плоскости. Сначала первый отмечает точку красным цветом, затем второй отмечает 100 точек синим, затем первый снова одну точку красным, второй 100 точек синим и так далее. (Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя.) Докажите, что первый может построить правильный треугольник с красными вершинами.

3. В углу шахматной доски размером $m \times n$ полей стоит ладья. Двое по очереди передвигают ее по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?

4. Двое играют на доске 99×2014 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

5. Имеется 99! молекул. Двое по очереди за один ход съедают не меньше одной, но не больше 1% молекул. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике ($n > 1$). Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки (прямоугольники 1×2). Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

Комбинаторная геометрия

1. Из точки O выходит несколько лучей. Угол между любыми двумя меньше 120°. Докажите, что найдутся два луча такие, что все остальные содержатся в угле между ними.

2. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают треугольник целиком.

3. На плоскости дано 5 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого многоугольника.

4. Могут ли в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ACD, BDE, CEA, DAB, EBC быть тупыми?

5. Внутри выпуклого n-угольника отмечена точка. Докажите, что ее проекция на одну из сторон попадет строго на сторону, а не на продолжение.

6. На прямой расположено $2n+1$ отрезков. Каждый из них пересекает не менее n других. Докажите, что один из отрезков пересекает все остальные.

7. Внутри выпуклого стоугольника отмечено k точек ($2 \leqslant k \leqslant 50$). Докажите, что можно выбрать $2k$ вершин стоугольника так, чтобы $2k$-угольник с вершинами в них содержал все отмеченные точки (точки могут лежать внутри или на границе $2k$-угольника).

8. **(a)** Вершины выпуклого пятиугольника расположены в узлах целочисленной сетки. Докажите, что внутри пятиугольника есть хотя бы одна целая точка.
(b) Вершины выпуклого пятиугольника расположены в узлах целочисленной решетки. В пятиугольнике провели все диагонали, и они высекли на плоскости маленький пятиугольник. Докажите, что внутри него или на его границе найдется узел решетки.

9. Конечное множество точек на плоскости удовлетворяет следующему условию: для любых двух точек множества на прямой, их соединяющей, найдется третья точка из множества. Докажите, что все точки множества лежат на одной прямой.

Соответствия

1. Дан выпуклый n-угольник такой, что никакие три его диагонали не пересекаются в одной точке. Найдите количество точек пересечения диагоналей данного многоугольника (не являющиеся вершинами многоугольника).

2. На клетчатой бумаге изображен квадрат, сторона которого умещает ровно n клеток. Сколькими способами в этом квадрате можно поместить произвольный
(a) квадрат? **(b)** прямоугольник?
(c) произвольную букву «Г» (в том числе и как угодно перевернутую)? Здесь буква «Г» — это объединение двух прямоугольников $1 \times n$ и $m \times 1$ с единственной общей клеткой-концом ($m, n > 1$).
(Стороны всех фигур проходят по сторонам сетки.)

3. Может ли оканчиваться на 3 сумма делителей числа (считая единицу и само число), оканчивающегося на 3?

4. Докажите, что количество разбиений натурального числа n в сумму не более чем k натуральных слагаемых, равно количеству разбиений числа n в сумму натуральных слагаемых, не превосходящих k.

5. **(a)** Рассмотрим набор чисел $\{a_1, \dots, a_{2n+1}\}$, где каждое равно ± 1 и сумма всех чисел набора равна единице. Докажите, что набор можно циклически сдвинуть так, что все частичные суммы $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ будут положительны.
(b) Сколько последовательностей $\{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$, состоящих из единиц и минус единиц, обладают тем свойством, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$, а все частичные суммы $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ неотрицательны?
(c) Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла доски $(n+1)\times(n+1)$ в ее правый верхний угол, сдвигаясь каждым ходом на одну клетку вправо или вверх и не разу не оказавшись выше главной диагонали доски?
(d) Сколько существует способов разрезать выпуклый $(n + 2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?

6. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с основанием $a \times b$ и высотой c (a, b и c — натуральные числа) оклеена по клеточкам без наложений и пропусков прямоугольниками со сторонами, параллельными ребрам параллелепипеда, каждый из которых состоит из четного числа единичных квадратов (верх и низ клеить не надо). При этом разрешается перегибать прямоугольники через боковые ребра параллелепипеда. Докажите, что если c нечетно, то число способов оклейки четно.

Добавка по комбинаторике

1. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них стоит звездочка. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число строк таблицы, где есть хотя бы одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, где есть хотя бы одна звездочка.

2. В каждой клетке доски 2000×2002 находится по лампочке. В начале, на доске горит больше чем $1999 \cdot 2001$ лампочек. За одну операцию можно взять квадратик 2×2, в котором выключено ровно 3 лампочки и выключить четвертую в этом квадратике (конечно, только если такой найдется). Докажите, что такими операциями нельзя выключить все лампочки на доске.

3. В клетчатом прямоугольнике 49×69 отмечены все $50 \cdot 70$ вершин клеток. Двое играют в следующую игру: каждым своим ходом каждый игрок соединяет две точки отрезком, при этом одна точка не может являться концом двух проведенных отрезков. Отрезки могут содержать общие точки. Отрезки проводятся до тех пор, пока точки не кончатся. Если после этого первый может выбрать на всех проведенных отрезках направления так, что сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору, то он выигрывает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Алгоритмы и стратегии

1. На плоскости нарисованы квадрат и невидимая точка, не лежащая на границе квадрата. За один ход Вася может провести прямую и спросить, по какую сторону лежит точка (если точка лежит на прямой, он получает произвольный ответ). За какое наименьшее число вопросов он сможет узнать, лежит ли точка внутри квадрата?

2. Даны 8 гирек весом 1, 2, … , 8 грамм, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

3. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, первый крестик, второй — нолик, первый — крестик, второй — нолик и т. д. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

4. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

5. На бесконечной клетчатой полоске шириной в одну клетку расставлены две ловушки, между которыми находится n свободных клеток, в одной из которых сидит своенравный кузнечик. Кузя и кузнечик играют в игру. Кузя называет натуральное число, а кузнечик прыгает на названное число клеток куда ему заблагорассудится (т. е. вправо или влево). При каких n вне зависимости от начального положения кузнечика Кузе удастся загнать кузнечика в ловушку?

6. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак черного или белого цвета. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из двух цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?

7. Двое по очереди закрашивают клетки доски 999×999 черным цветом (в начале доска полностью белая). Нельзя красить клетку дважды, нельзя чтобы в одной строке или столбце было больше двух закрашенных клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Графы

1. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k, где $k > 1$. Докажите, что в этом графе найдется простой цикл длины не меньшей, чем $k + 1$.

2. В графе $2n$ вершин, причем степень каждой вершины четна. Докажите, что существуют такие две вершины, что число их общих соседей четно.

3. Обозначим доли двудольного графа как A и B. Степень каждой вершины из доли A не больше десяти. Известно также, что для любых одиннадцати вершин из доли A существует общий сосед из доли B. Докажите, что для всех вершин из доли A существует общий сосед из B (число вершин в доле A не менее 11).

4. Хроматическое число графа G равно k. Известно, что существует такая правильная раскраска G такая, что вершин каждого цвета хотя бы 2. Докажите, что существует такая правильная раскраска в k цветов, что вершин каждого цвета хотя бы две. (Правильной раскраской вершин графа называется такая раскраска, что никакие две вершины одного цвета не смежны. Хроматическим числом графа называется такое минимальное натуральное k, что существует правильная раскраска вершин в k цветов).

5. Вершины графа G можно единственным образом разбить на 5 групп так, что никакие две вершины из одной группы не смежны (группы могут быть пустыми). Пусть n — число вершин в G. Докажите, что ребер в графе G не меньше, чем $4n - 10$.

6. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число ребер может быть у такого графа?

7. Ребра графа раскрашены в k цветов. Известно, что любые два ребра одного цвета имеют общую вершину. Докажите, что вершины можно разбить на $k+2$ группы так, чтобы никакие две вершины из одной группы не были смежны.

8. В связном графе 1000 вершин, причем степень каждой равна трем. Докажите, что можно удалить такие 101 попарно не смежную вершину, вместе с выходящими из них ребрами, чтобы граф остался связным.

Глава 6

Чёрные Слоны (11-1)

Тренировочная олимпиада

1. *Лабиринтом* назовем расстановку перегородок между некоторыми парами соседних по стороне клеток шахматной доски. Лабиринт *проходи́м*, если из любой его клетки можно попасть в любую другую, перемещаясь каждый раз в соседнюю по стороне клетку и не пересекая перегородок. Каких лабиринтов больше, проходимых или непроходимых?

2. Существуют ли 2015 непересекающихся непостоянных арифметических прогрессий натуральных чисел, таких что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2015, и лишь конечное число натуральных чисел в них не лежит?

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили середины C_1, B_1, A_1 сторон AB, AC, BC соответственно. Серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AA_1 в точках B_2, C_2 соответственно. Прямые BB_2 и CC_2 пересекаются в точке X, лежащей внутри треугольника. Докажите, что точки A, B_1, C_1, X лежат на одной окружности.

4. Докажите, что существует многочлен $P(x, y, z)$ степени не более 3, задающий биекцию $P\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$.

5. На плоскости даны n точек общего положения. Докажите, что можно вбить $(2n - 5)$ гвоздей так, чтобы в каждый треугольник с вершинами в этих точках был бы вбит хотя бы один гвоздь (запрещено вбивать в гвозди в прямые, соединяющие исходные точки).

Алгебра

1. Найдите все такие n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.
2. Число N, не кратное 81 представимо в виде суммы квадратов трех чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно представимо в виде суммы квадратов трех чисел, не делящихся на 3.
3. Дано натуральное число c и последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ такая, что $p_i + c$ делится на p_{i+1}. Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.
4. Докажите, что $\varphi(2^n - 1)$ делится на n.
5. Даны 4 точки на плоскости. Все попарные расстояния между ними — нечетные целые числа. Докажите, что такого быть не может.
6. Пусть p_n — минимальный простой делитель числа $(n!)^n + 1$. Докажите, что существует N такое, что при всех $n > N$ выполнено $p_n > n + 2015$.
7. **(a)** Дано простое число p и натуральное a. Докажите, что любой простой делитель числа $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$ либо равен p, либо имеет вид $pk + 1$.
   (b) Докажите, что простых чисел вида $pk + 1$ бесконечно много.
8. Докажите, что не существует целых x, y, что $x^2 + 5 = y^3$.
9. Известно, что $2^{2k} + 2^k + 1 = p$ — простое число. Докажите, что $2^{2^k+1} - 1$ делится на p.

Теория чисел. Добавка

1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$, и $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = c$. Докажите, что c — точный квадрат.

2. Пусть $d(n)$ — число делителей натурального числа n. Найдите все возрастающие последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такие, что $d(a_i + a_j) = d(i + j)$ при всех натуральных i и j.

3. Числовой треугольник строится следующим образом: в первой строчке стоит одно число, а в каждой следующей строчке числа располагаются под предыдущими, и добавляется по одному числу с краю. Число в первой строчке равно 1; каждое из остальных равно сумме трех чисел в предыдущей строчке: из той же вертикали и из двух соседних (пустые места считаются нулями). Докажите, что в среднем столбце нет чисел, сравнимых с 2 по модулю 3.

4. Найдите все пары многочленов $P(x), Q(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для всех натуральных n выполняется равенство $P(1) \cdot P(2) \cdot \ldots \cdot P(n) = Q(n!)$.

5. Для натурального k определим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = k + 1$ и $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k$ при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?

6. Даны натуральные числа a, b, k. Для последовательности натуральных чисел $\{x_n\}$ выполнено $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$. Докажите, что существует натуральное N такое, что при $n > N$ все числа x_i, делящиеся на k, будут лежать через равные промежутки.

7. Можно ли раскрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, чтобы не нашлось трех различных одноцветных натуральных чисел x, y и z, для которых $x + y = z^2$?

Многочлены

1. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2014}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, для которого можно подобрать константу C такую, что многочлен $P(x) \cdot \big(P(x) + C\big)$ имеет $2n$ различных корней?
Разберите случаи **(a)** $n = 4$; **(b)** $n = 3$; **(c)** $n = 5$.

3. При каких n многочлен $x^n + 1$ неприводим?

4. При каких n многочлен $x^n + 64$ неприводим?

5. Пусть для некоторых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ выполнено равенство

$$x^{2014} = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \cdot P(x) + Q(x)\,,$$

где степень $Q(x)$ не превосходит 2. Докажите, что все коэффициенты $P(x)$ положительны.

6. Исходно на доске написано $(x^3 - 3x^2 + 5)$ и $(x^2 - 4x)$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то разрешается дописать любые из многочленов

$$f(x) + g(x),\ \ f(x) - g(x),\ \ f(x) \cdot g(x),\ \ f(g(x)),\ \ c \cdot f(x)\,,$$

где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких таких операций появиться многочлен вида $(x^n - 1)$?

7. P, Q — многочлены с целыми коэффициентами, $k \in \mathbb{N}$. Число $\big(P(Q(x)) - x\big)$ делится на k при всех целых x. Докажите, что $\big(Q(P(x)) - x\big)$ тоже делится на k при всех целых x.

8. P, Q — взаимно простые многочлены с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное C такое, что для любого целого n НОД чисел $P(n)$ и $Q(n)$ не превосходит c.

9. Для каких n существует многочлен степени n с целыми коэффициентами, в точках $0, \ldots, n$ принимающий значения, являющиеся степенями двойки?

10. *Допустимая замена* меняет каждый из коэффициентов многочлена не более чем на 2009. Докажите, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существует многочлен с целыми коэффициентами n-й степени, который неприводим и останется неприводим после любой допустимой замены.

11. Найдите все пары (m, n), где $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 3$, такие, что многочлен $(x^m + x - 1)$ делится на $(x^n + x^2 - 1)$.

12. Пусть $P(x)$ — неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами, $Q(x)$, $R(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что $P(Q(x))$ делится на $R(x)$. Докажите, что $\deg R(x) \geqslant n$.

Геометрия с соотношениями

1. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Две равные окружности касаются пар сторон AB и BC, AC и BC и друг друга в точке K. Оказалось, что K, I, O лежат на одной прямой. Найдите $\angle BAC$.

2. На сторонах треугольника ABC отметили точки A_1, B_1, C_1 таким образом, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, а радиусы относятся как $2 : 1$. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

3. A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон треугольника ABC с соответствующими вневписанными окружностями, O и I — центры описанной и вписанной окружностей. Докажите, что если $AB_1A_1C_1$ — вписанный, то B_1C_1 проходит через точку I и точка A_1 лежит на прямой OI.

4. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлись такие точки P и Q, что четырехугольники $APQD$ и $BPQC$ вписанные. А еще на отрезке PQ нашлась нашлась такая точка E, что $\angle PBE = \angle QCE$ и $\angle PAE = \angle QDE$. Докажите, что $ABCD$ — вписанный.

5. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда площади треугольников ACE и BDF равны.

6. В остроугольном треугольнике ABC отметили центры O и I описанной и вписанной окружностей соответственно и ортоцентр H. Докажите, что $OI \parallel BC$ тогда и только тогда $\angle AIH = 90^\circ$.

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB = AC = BD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников ABC и AOD вторично пересекаются в точке P. Прямые AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что OQ — биссектриса угла $\angle COD$.

8. Задача отозвана. ~~В треугольнике ABC отметили центр O описанной окружности и опустили высоту AH. B_1, C_1 — проекции точки H на AC и AB. Докажите, что если $AB = 2B_1O$, то $AC = 2C_1O$.~~

9. В треугольнике ABC провели биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Оказалось, что прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются под углом 60°. Докажите, что один из углов треугольника $A_1B_1C_1$ — прямой.

10. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены точки E и F соответственно, $EF \parallel BC$. EF пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках U и V. Точка M — середина BC. Оказалось, что описанные окружности ω и ω' треугольников ABC и MUV соответственно равны. ME пересекает ω' вторично в T, TF пересекает ω' вторично в S. Докажите, что EF касается описанной окружности треугольника MCS.

Планиметрический разнобой

1. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведена общая касательная, касающаяся их в точках A и B соответственно. Окружность, построенная на AB как на диаметре, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках D и C соответственно. Докажите, что AC и BD пересекаются на линии, соединяющей центры ω_1 и ω_2.

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$. I — центр вписанной окружности треугольника ACD. Точка X на биссектрисе угла ABD такова, что $IX \perp BC$. Описанная окружность треугольника XDB пересекает прямую AD в точке Y. Докажите, что треугольник BXY — равнобедренный.

3. B_1 и A_1 — точки касания соответственных вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами AC и BC соответственно. Луч AA_1 впервые пересекает вписанную в треугольник окружность в точке P и прямую BB_1 в точке Q. Докажите, что $AP = A_1Q$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C отмечена точка пересечения медиан G. На лучах AG, BG отметили такие точки P и Q соответственно, что $\angle APC = \angle CAB$ и $\angle BQC = \angle CBA$. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AGQ и BGP лежит на гипотенузе AB.

5. Внутри вписанного четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка X, что $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCD = \angle XDA$. Продолжения пар противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle PXQ$ равен углу между диагоналями четырехугольника.

6. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC отмечена точка D, $BD = 2CD$. На отрезке AD отметили E, $\angle BAC = \angle BED$. Докажите, что $\angle BED = 2\angle CED$.

7. Точки M и N — середины большой и малой дуг BC описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC соответственно, BH — высота. Точка K на прямой AM такова, что $\angle NHK = 90^\circ$. Докажите, что $BK = BM$.

8. В треугольнике ABC на стороне BC отмечены точки: X_0, X_3 и X_6 на BC, X_1, X_4 на AC, X_2, X_5 на AB. Известно, что прямые X_0X_1, X_2X_3, X_4X_5 параллельны сторонам треугольника, на которых эти точки не лежат, а X_1X_2, X_3X_4, X_5X_6 — антипараллельны. O — центр описанной окружности треугольника, L — точка Лемуана (пересечения симедиан) треугольника.
   (a) Докажите, что $X_0 = X_6$.
   (b) Докажите, что $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ лежат на одной окружности.
   (c) Докажите, что центр этой окружности лежит на прямой OL.

9. В шестиугольнике $ABCDEF$ (несамопересекающемся, но не обязательно выпуклом) внутренние уголки удовлетворяют равенствам $\angle A = 3\angle D$, $\angle C = 3\angle F$, $\angle E = 3\angle B$. Более того, $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$. Докажите, что прямые AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Комбинаторная можнолиметрия

1. Существует ли невыпуклый многогранник, вписанный в сферу?
(Многогранник вписан в сферу, если все его вершины лежат на сфере.)

2. Существует ли такая выпуклая фигура, что она не покрывает полукруг радиуса 1, но двумя ее экземплярами можно покрыть круг радиуса 1?

3. **(a)** Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?
(b) А три таких семиугольника?
(Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)

4. Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для *каждого* из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?

5. Можно ли намотать нерастяжимую ленту на бесконечный конус так, чтобы сделать вокруг его оси бесконечно много оборотов? Ленту нельзя наматывать на вершину конуса, а также разрезать и перекручивать. При необходимости можно считать, что она бесконечна, а угол между осью и образующей конуса достаточно мал.

6. Существуют ли такие 2012 треугольников, ни один из которых нельзя покрыть 2011-ю остальными?

7. *(«Багаж в Московском метрополитене»)* Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

8. Дано бесконечное множество
(a) прямоугольников, **(b)** квадратов,
сумма площадей которых не ограничена. Обязательно ли ими можно полностью покрыть плоскость?

9. **(a)** Существует ли многогранник и точка внутри него, из которой не видно ни одной его вершины? Всегда ли существует разбиение многогранника на тетраэдры, вершины которых есть вершины исходного многогранника?
(b) Тот же вопрос для точки вне многогранника.

Разнобой по планиметрии

1. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; точка D — середина стороны AC. Прямая, проходящая через H перпендикулярно отрезку DH, пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Докажите, что $HE = HF$.

2. Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$ и касается его не параллельных сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Пусть прямая AO и отрезок EF пересекаются в точке K, прямая DO и отрезок EF — в точке N, а прямые BK и CN — в точке M. Докажите, что точки O, K, M и N лежат на одной окружности.

3. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка A' — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1 и CC_1. Аналогичным образом определяются точки B' и C'. Точки A', B', C' лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Диагональ BD пересекает стороны AM и AN треугольника AMN соответственно в точках E и F, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка K, определяемая условиями $EK \parallel AD$ и $FK \parallel AB$, лежит на отрезке MN.

5. Через центр O окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC. Эти прямые пересекают высоту AD треугольника ABC в точках P и Q. Точка M — середина стороны BC, а S — центр окружности, описанной около треугольника OPQ. Докажите, что $\angle BAS = \angle CAM$.

6. Дан треугольник ABC. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекает сторону AB в точке K, а также пересекает сторону BC. Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной из точки B к ω.

7. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника IMN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

Разнобой по стереометрии

1. Дан выпуклый многогранник P. Из каждой грани во вне этого многогранника проведен вектор по модулю равный площади этой грани, а по направлению перпендикулярный ей. Докажите, что сумма всех проведенных векторов равна нулю.

2. Могут ли четыре центра вписанных окружностей граней тетраэдра лежать в одной плоскости?

3. В тетраэдре провели четыре отрезка, соединяющие вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней. Докажите, что если два таких отрезка пересекаются, то два других тоже.

4. Многогранник называется *кубоподобным*, если у него 8 вершин, 6 граней, каждая из которых является четырехугольником, и в каждой вершине сходится по три грани. Докажите, что если 7 вершин кубоподобного многогранника лежат на одной сфере, то и восьмая тоже лежит на этой же сфере.

5. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот, а также точки, делящие остальные высоты в отношении $2 : 1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

6. На боковых ребрах SA, SB и SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки S, A, B и C_1. Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости A_1B_1C.

7. Сфера касается всех граней многогранника. Назовем грань многогранника *большой*, если проекция сферы на эту грань полностью в ней содержится. Докажите, что больших граней не больше 6.

8. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. На ребре CD берутся всевозможные точки M. Докажите, что ортоцентры всех треугольников AMB лежат на одной окружности.

Добавка по стереометрии

1. Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'.

2. Точка O лежит в основании $A_1A_2 \dots A_n$ пирамиды $SA_1 \dots A_n$, причем $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем n отсюда следует, что SO — высота пирамиды?

3. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противолежащего бокового ребра под прямым углом?

4. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины ребер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$. Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$. В пирамиду вписана сфера, касающаяся грани $ABCD$ в точке P. Докажите, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

6. Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный.

7. В тетраэдре $ABCD$ определим точку H_a как проекцию вершины A на плоскость BCD, точку H_{ac} как проекцию H_a на прямую AC, аналогично определим другие такие точки. Докажите, что если плоские углы при вершине A равны, то точки H_{ab}, H_{ac}, H_{ad}, H_{ba}, H_{ca} и H_{da} лежат на одной сфере.

8.* Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

Добавка по стереометрии (ещё)

9. Вписанная в тетраэдр $SABC$ сфера ω касается его боковых граней SBC, SCA и SAB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая AA_1 вторично пересекает сферу ω в точке A_2, прямая SA_2 вторично пересекает сферу ω в точке A_3, наконец, прямая A_1A_3 пересекает ребро AS в точке A'. Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что плоскость $A'B'C'$ касается сферы ω.

10. Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.

11.* На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.

12.* Вписанная в тетраэдр $ABCD$ сфера касается его граней ABC, ABD, ACD и BCD в точках D_1, C_1, B_1 и A_1 соответственно. Рассмотрим плоскость, равноудаленную от точки A и плоскости $B_1C_1D_1$ и три другие аналогично построенные плоскости. Докажите, что тетраэдр, образованный этими четырьмя плоскостями, имеет тот же центр описанной сферы, что и тетраэдр $ABCD$.

13.* Даны точки A_1, A_2, A_3, A_4 общего положения в пространстве такие, что $A_1A_2 \cdot A_3A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4 = A_1A_4 \cdot A_2A_3$. Обозначим через O_i центр описанной окружности треугольника A_{jkl}, где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Докажите, что прямые A_iO_i пересекаются в одной точке или параллельны.

Комбинаторика-1

1. В клетках доски 100×100 в некотором порядке написаны числа $1, 2, \dots, 10000$ (в каждой клетке по числу). Докажите, что найдутся соседние по стороне клетки, в которых написаны числа, отличающиеся не менее, чем на 100.

2. Дана таблица $n \times n$. В ней стоит $(n-1)$ единица, остальные нули. За ход разрешается выбрать клетку, уменьшить значение в ней на 1 и одновременно увеличить на 1 значение во всех клетках, находящихся с ней в одном столбце и одной строке. Можно ли все числа сделать равными?
(a) $n = 2$. **(b)** n произвольное.

3. В каждой клетке доски 2000×2002 находится по лампочке. В начале, на доске горит больше чем $1999 \cdot 2001$ лампочек. За одну операцию можно взять квадратик 2×2, в котором выключено ровно 3 лампочки и выключить четвертую в этом квадратике (конечно только если такой найдется). Докажите, что такими операциями нельзя выключить все лампочки на доске.

4. Пусть дано множество $\Omega = \{\pm a_1, \dots, \pm a_{10}\}$, где $a_1, \dots, a_{10}$ — целые ненулевые числа. Докажите, что существует такое подмножество $S \subset \Omega$, что в S нет одновременно чисел $\pm a_i$ и сумма чисел в S делится на 1001.

5. В n коробках лежат n^2 монет (коробка может быть пустой, $n \geqslant 3$). За ход можно взять три коробки, в которых в сумме лежит число монет, кратное трем, и равномерно поделить эти монеты по этим трем коробкам. При каких n, при любом начальном расположении монет по коробкам, можно получить позицию, в которой во всех коробках по n монет?

6. Круг разделен на $2n$ секторов, n синих и n красных. В красные по часовой стрелке вписаны числа от 1 до n, в синие — те же числа против часовой. Докажите, что найдется полукруг с числами от 1 до n.

7. Пусть n — фиксированное натуральное. При каком натуральном $m > n$, в зависимости от n, множество $\{n, n+1, n+2, \dots, m\}$ можно разбить на такие подмножества, чтобы в каждом получившемся подмножестве было число, равное сумме остальных чисел этого подмножества?

8. В квадрате $(n-1) \times (n-1)$ проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная по линиям сетки, причем проходящая по каждому из n^2 узлов сетки ровно по одному разу. Докажите, что можно провести такой разрез по ребру сетки, чтобы получилось две фигуры, периметр которых не меньше четверти периметра изначальной фигуры.

Комбинаторика-2

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

2. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k средним, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

3. Докажите, что можно разбить все натуральные числа на 100 непустых подмножеств так, что для любых таких чисел $a, b, c \in \mathbb{N}$, что $a + 99b = c$, хотя бы два из этих чисел принадлежали бы одному подмножеству.

4. $2N$ участников заполняют психологическую анкету из $2k$ вопросов, на которые можно ответить «да» или «нет». Для любой пары вопросов известно, что ровно половина участников ответила одинаково на оба вопроса (либо оба ответа «да», либо оба — «нет»). Докажите, что количество участников, которые ответили ровно на половину вопросов «да», не превосходит $(2N - N/k)$.

5. Пусть m и n — натуральные числа. Дан прямоугольник. Известно, что этот прямоугольник можно разрезать на горизонтальные полоски $1 \times m$ и вертикальные полоски $n \times 1$. Докажите, что на самом деле прямоугольник можно разрезать на полоски только одного из этих двух типов.

6. Пусть множество A состоит из N различных вычетов по модулю N^2, где $N \geqslant 2$. Докажите, что существует такое множество B, состоящее из N вычетов по модулю N^2, что множество $A+B = \{a+b\}_{a \in A,\, b \in B}$ содержит не менее половины всех вычетов по модулю N^2.

7. Докажите, что существует такое натуральное число n, что если правильный треугольник со стороной n разбить прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1, то среди вершин этих треугольников можно выбрать $2015\,n$ точек, никакие три из которых не являются вершинами правильного треугольника (не обязательно со сторонами, параллельными сторонам исходного треугольника).

Добавка по комбинаторике

1. Несколько ребят стоят в круг. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого четное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечетное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

2. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 2015 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (K-той и $(K+1)$-ой), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(K-1)$-ую и $(K+2)$-ую комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).

3. Каждая клетка прямоугольника $2m \times 2n$ раскрашена в один из двух цветов. Известно, что если поставить ладью на любую клетку, то она будет бить больше клеток не своего цвета (считаем, что ладья бьет клетку на которой стоит). Докажите, что в каждой строке и в каждом столбце обоих цветов поровну.

4. Дано натуральное число k. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка является суверенным государством, а на каждом ребре стоит таможня, взимающая натуральное число талеров в качестве взятки за ее пересечение (в обоих направлениях — одинаковое, но, возможно, различное для разных границ). Докажите, что существует такой замкнутый маршрут, не заходящий ни в какую клетку дважды, что суммарная взятка на нем кратна k.

Вокруг теоремы Хелли

1. **Теорема Хелли. (a)** На плоскости расположены выпуклые фигуры, любые 3 имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.
(b) В n-мерном пространстве расположены выпуклые тела, любые $n+1$ имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

2. Стороны нескольких прямоугольников параллельны осям координат. Любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все прямоугольники имеют общую точку.

3. *(Задача на исследование)* На столе лежат круглые салфетки. Любые две пересекаются. Докажите, что их можно прибить 100 гвоздями. Можно ли уменьшить число 100? А если эти салфетки суть единичные круги? Если они есть выпуклые фигуры, отличающиеся параллельным переносом?

4. **Теорема Красносельского.** Дан (возможно, невыпуклый) многоугольник M. Известно, что для любых трех его сторон можно указать точку внутри M из которой они видны полностью. Тогда существует точка внутри M из которой видны полностью все стороны M.

5. На плоскости дано несколько точек. Известно, что любые 3 можно покрыть кругом единичного радиуса. Тогда все точки можно покрыть кругом единичного радиуса.

6. **Теорема Юнга.** На плоскости дано несколько точек, расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Тогда все точки можно покрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

7. **Теорема Юнга для трехмерья.** В пространстве дано несколько точек, расстояние между любыми двумя не превосходит 1. Тогда все можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{6}/4$.

8. Любая фигура диаметра 1 заключается в круг радиуса $1/\sqrt{3}$.

9. **Теорема Бляшке.** Любая выпуклая фигура ширины 1 содержит круг радиуса $1/(2\sqrt{3})$.

10. **Теорема Бляшке для трехмерья.** Любое выпуклое тело ширины 1 содержит шар радиуса $1/(2\sqrt{3})$.

11. На плоскости отмечено n точек общего положения. Докажите, что существует точка O такая, что по каждую сторону любой прямой, проходящей через O находится не менее $n/3$ отмеченных точек.

12. На плоскости дана ограниченная кривая K длины L без прямолинейных участков. Докажите, что существует точка O такая, что любая прямая, проходящая через O, рассекает K на две части, длина каждой не менее $L/3$.

13. На плоскости дана ограниченная фигура Φ площади S. Докажите, что существует точка O такая, что любая прямая, проходящая через O, рассекает Φ на две части, площадь каждой не менее $S/3$.

14. Докажите, что внутри каждой ограниченной выпуклой фигуры Φ найдется точка O такая, что всякая хорда AB фигуры Φ, проходящая через O, разбивается этой точкой

на отрезки AO и BO, длина каждого из которых не менее $|AB|/3$.

15. Сформулируйте и докажите аналоги предыдущих 4 задач для n-мерного пространства. Получите неулучшаемые оценки.

Алгоритмы и стратегии

1. На плоскости нарисованы квадрат и невидимая точка, не лежащая на границе квадрата. За один ход Вася может провести прямую и спросить, по какую сторону лежит точка (если точка лежит на прямой, он получает произвольный ответ). За какое наименьшее число вопросов он сможет узнать, лежит ли точка внутри квадрата?

2. Даны 8 гирек весом 1, 2, … , 8 грамм, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

3. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, первый крестик, второй — нолик, первый — крестик, второй — нолик и т. д. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

4. Двое по очереди закрашивают клетки доски 999×999 черным цветом (в начале доска полностью белая). Нельзя красить клетку дважды, нельзя чтобы в одной строке или столбце было больше двух закрашенных клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

6. **(a)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
(b) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?

Графы

1. В графе $2n$ вершин, причем степень каждой вершины четна. Докажите, что существуют такие две вершины, что число их общих соседей четно.

2. Хроматическое число графа G равно k. Известно, что существует такая правильная раскраска G такая, что вершин каждого цвета хотя бы 2. Докажите, что существует такая правильная раскраска в k цветов, что вершин каждого цвета хотя бы две. (Правильной раскраской вершин графа называется такая раскраска, что никакие две вершины одного цвета не смежны. Хроматическим числом графа называется такое минимальное натуральное k, что существует правильная раскраска вершин в k цветов).

3. Вершины графа G можно единственным образом разбить на 5 групп так, что никакие две вершины из одной группы не смежны (группы могут быть пустыми). Пусть n — число вершин в G. Докажите, что ребер в графе G не меньше, чем $4n - 10$.

4. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число ребер может быть у такого графа?

5. Ребра графа раскрашены в k цветов. Известно, что любые два ребра одного цвета имеют общую вершину. Докажите, что вершины можно разбить на $k+2$ группы так, чтобы никакие две вершины из одной группы не были смежны.

6. В связном графе 1000 вершин, причем степень каждой равна трем. Докажите, что можно удалить такие 101 попарно не смежную вершину, вместе с выходящими из них ребрами, чтобы граф остался связным.

7. В графе на n вершинах нет двух циклов, пересекающихся ровно по одному ребру. Найдите максимальное возможное количество ребер в нем.

8.* Ребра полного графа раскрашены в три цвета, причем между любыми двумя вершинами есть пути каждого цвета. Докажите, что найдется треугольник с ребрами трех разных цветов.

Глава 7

Дополнительные материалы

Тренировочная олимпиада — 1

Версия с решениями

1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель на 55 больше самого маленького собственного делителя. (*Собственными* называются все натуральные делители числа кроме него самого и единицы).

Олимпиада им. Кукина

Ответ: 114.

Пусть x — наименьший собственный делитель числа N. Числа x и $x+55$ — разной четности, поэтому одно из них четно. Оба числа — делители N, значит, N — четно. Поэтому наименьший собственный делитель N равен 2. Так как $x = 2$, то наибольший собственный делитель равен $2 + 55 = 57$. Ясно, что наибольший собственный делитель равен N/x. Поэтому $N = 2 \cdot 57 = 114$.

2. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Числа $2x$, $4x$ и $5x$ оказались не целыми и не полуцелыми. Он округлил каждое из этих трех чисел до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите x.

А. Шаповалов

Ответ: $10\frac{8}{9}$.

Давайте число a после округления обозначать $R(a)$, а сумму $R(2x)+R(4x)+R(5x)$ обозначим S. Докажем, что $10\frac{6}{7} < x < 11$. Воспользуемся тем, что если $a \leqslant b$, то и $R(a) \leqslant R(b)$. Если $x \leqslant 10\frac{6}{7}$, то $S \leqslant R(21\frac{5}{7}) + R(43\frac{3}{7}) + R(54\frac{2}{7}) = 22 + 43 + 54 = 119 < 120$, а при $x \geqslant 11$ $S \geqslant R(22) + R(44) + R(55) = 22 + 44 + 55 = 121 > 120$. Значит, $x = 11 - y$, где $0 < y < 1/7$ и записывается как правильная дробь с однозначным знаменателем. Значит, $y = 1/8$ или $y = 1/9$. Первое невозможно, так как тогда $4x = 43{,}5$ — полуцелое число. Значит, $y = 1/9$. Отсюда ответ $x = 10\frac{8}{9}$, который, как легко проверить, подходит.

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки C', A' и B' соответственно так, что угол $A'C'B'$ — прямой. Докажите, что отрезок $A'B'$ длиннее диаметра вписанной окружности треугольника ABC.

М. Волчкевич, 4-я устная олимпиада по геометрии, 2006 г.

Пусть $A'B' = 2m$. Надо доказать, что $m > r$ — радиуса вписанной окружности. Отметим середину M отрезка $A'B'$. Тогда $MA' = MB' = MC' = m$. Перпендикуляры, опущенные из M на стороны треугольника ABC, не превосходят m. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Соединим M с вершинами A, B, C.

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM} \leqslant \frac{AB \cdot m}{2} + \frac{AC \cdot m}{2} + \frac{BC \cdot m}{2} = p \cdot m,$$

где p — полупериметр треугольника. Равенство достигается только в случае, когда все расстояния до сторон равны m. Но тогда все отрезки MA', MB' и MC' перпендикулярны сторонам. Это невозможно, так как тогда стороны AC и BC были бы обе перпендикулярны $A'B'$, то есть параллельны. Значит, $S_{ABC} < p \cdot m$. Но $S_{ABC} = p \cdot r$. Отсюда $p \cdot m > p \cdot r$ и $m > r$.

4. На доске 50×50 выставлены более десяти ладей так, что каждое пустое поле и каждая ладья побита одинаковым числом ладей. Сколько всего ладей? (Ладья бьет поле или другую ладью на той же вертикали или горизонтали, если между ними нет других фигур. Ладья себя не бьет.)

А. Шаповалов

Ответ: 100.

Пусть каждое поле и ладья побиты k ладьями. Ясно, что $k > 0$. Кроме того, $k \leqslant 2$: угловое поле побито не более чем двумя ладьями. Если $k = 1$, две бьющие друг друга ладьи не бьют всю доску, а третья ладья побьет кого-то из них либо уже побитое поле. Противоречие. Значит, $k \neq 1$, поэтому $k = 2$.

Докажем, что на каждой горизонтали или вертикали стоит не больше двух ладей. Допустим противное: ладьи X, Y и Z стоят на одной горизонтали в вертикалях x, y, z соответственно, y между x и z. Тогда на вертикали y других ладей нет. Ладьи X, Y и Z входят в «цикл» бьющих друг друга ладей. Обходя цикл, мы пересечем вертикаль y еще раз. Поле на пересечении побито трижды. Противоречие.

Если есть пустая вертикаль, то каждое поле на ней побито дважды по горизонтали. Значит, на каждой горизонтали ровно две ладьи, и всего их 100. Если есть вертикаль с ровно одной ладьей, то эта ладья дважды побита по горизонтали — но трех ладей на горизонтали быть не может. Противоречие. Остался случай, когда на каждой вертикали ровно по две ладьи, и тогда всего их 100.

Замечание. Хотя это и не требуется для решения задачи, такая расстановка ладей существует: выделим вдоль главной диагонали 25 квадратов 2×2 и заполним их ладьями.

Тренировочная олимпиада — 1

Версия с решениями

1. Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Числа $2x$, $4x$ и $5x$ оказались не целыми и не полуцелыми. Он округлил каждое из этих трех чисел до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите x.

А. Шаповалов

Ответ: $10\frac{8}{9}$.

Давайте число a после округления обозначать $R(a)$, а сумму $R(2x)+R(4x)+R(5x)$ обозначим S. Докажем, что $10\frac{6}{7} < x < 11$. Воспользуемся тем, что если $a \leqslant b$, то и $R(a) \leqslant R(b)$. Если $x \leqslant 10\frac{6}{7}$, то $S \leqslant R(21\frac{5}{7}) + R(43\frac{3}{7}) + R(54\frac{2}{7}) = 22 + 43 + 54 = 119 < 120$, а при $x \geqslant 11$ $S \geqslant R(22) + R(44) + R(55) = 22 + 44 + 55 = 121 > 120$. Значит, $x = 11 - y$, где $0 < y < 1/7$ и записывается как правильная дробь с однозначным знаменателем. Значит, $y = 1/8$ или $y = 1/9$. Первое невозможно, так как тогда $4x = 43{,}5$ — полуцелое число. Значит, $y = 1/9$. Отсюда ответ $x = 10\frac{8}{9}$, который, как легко проверить, подходит.

2. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель на 50 больше квадрата самого маленького собственного делителя. (*Собственными* называются все натуральные делители числа кроме него самого и единицы).

А. Шаповалов, по мотивам задачи олимпиады им. Кукина

Ответ: 108 и 177.

Пусть x — наименьший собственный делитель числа N, а y — наибольший. Ясно, что $y = N/x$, и поэтому $N = xy$. Очевидно также, что число x — простое. Рассмотрим 2 случая.
Случай 1. $x \neq 3$. Тогда x^2 дает остаток 1 при делении на 3. Поэтому $y = x^2 + 50$ делится на 3. Тогда и у N есть собственный делитель 3. Так как x — наименьший собственный делитель, $x < 3$. Значит, $x = 2$. Тогда $y = 2^2 + 50 = 54$, $N = 2 \cdot 54 = 108$.
Случай 2. $x = 3$. Тогда $y = 3^2 + 50 = 59$, $N = 3 \cdot 59 = 177$.

3. Можно ли на доску 2015×2015 выставить несколько ладей так, что каждое пустое поле и каждая ладья была побита одинаковым числом ладей? (Ладья бьет поле или другую ладью на той же вертикали или горизонтали если между ними нет других фигур. Ладья себя не бьет.)

А. Шаповалов

Ответ: нет.

Пусть каждое поле и ладья побиты k ладьями. Ясно, что $k > 0$. Кроме того, $k \leqslant 2$: угловое поле побито не более чем двумя ладьями. Если $k = 1$, две бьющие друг друга ладьи не бьют всю доску, а третья ладья побьет кого-то из них либо уже побитое поле. Противоречие. Значит, $k \neq 1$, поэтому $k = 2$.

Докажем, что на каждой горизонтали или вертикали стоит не больше двух ладей. Допустим противное: ладьи X, Y и Z стоят на одной горизонтали в вертикалях x, y, z соответственно, y между x и z. Тогда на вертикали y других ладей нет. Ладьи X, Y и Z входят в «цикл» бьющих друг друга ладей. Обходя цикл, мы пересечем вертикаль y еще раз. Поле на пересечении побито трижды. Противоречие.

Если есть пустая вертикаль, то каждое поле на ней побито дважды по горизонтали. Значит, на каждой горизонтали ровно две ладьи, и всего их 4030. Но тогда занятых вертикалей меньше 2015, поэтому на некоторой вертикали стоит более двух ладей. Противоречие. Если есть вертикаль с ровно одной ладьей, то эта ладья дважды побита по горизонтали — но трех ладей на горизонтали быть не может. Противоречие.

Остался случай, когда на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит ровно по две ладьи. Допустим, две бьющие друг друга ладьи стоят не рядом (скажем, на одной вертикали). Тогда между ними есть пустое поле. Оно уже побито дважды по вертикали, и еще хотя бы раз по горизонтали. Противоречие.

Рассмотрим цикл из бьющих друг друга ладей. Две самые верхние ладьи в нем стоят рядом, а ладьи в тех же вертикалях стоят на одну клетку ниже. Значит, цикл состоит из этих четырех ладей, и это верно для всех циклов. Поэтому общее число ладей кратно 4. Однако на доске 2015×2015 их должно быть $2 \cdot 2015$, что не кратно 4. Противоречие.

4. Внутри треугольника отмечена точка. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин треугольника не превосходит суммы двух наибольших сторон.

Н. Седракян, 3-я Устная олимпиада по геометрии, 2005 г.

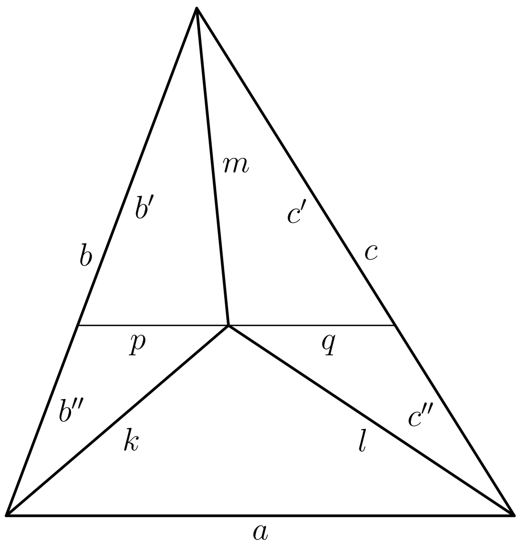


Рис. 7.1: к решению задачи 4

Пусть стороны треугольника $a \leqslant b \leqslant c$, а отрезки из точки к вершинам — k, l и m (рис. 7.1). Проведем через отмеченную точку отрезок, параллельный стороне a. Мы отсекли подобный треугольник со сторонами $a' \leqslant b' \leqslant c'$. Обозначим отрезки, на которые разделились стороны, как на рисунке. Тогда $a' = p+q$, $b = b'+b''$, $c = c'+c''$. По неравенству треугольника $k < b'' + p$, $l < q + c''$. Кроме того, чевиана m не превосходит большей из боковых сторон отсеченного треугольника: $m \leqslant c'$. Поэтому

$$\begin{aligned} k + l + m &< (b'' + p) + (q + c'') + c' = (p + q) + b'' + (c' + c'') = \\ &= a' + b'' + c \leqslant b' + b'' + c = b + c\,. \end{aligned}$$

Доказательство неравенства Караматы

Лемма о трех хордах. Если f — выпуклая функция, то для любых $z < y < x$ имеет место неравенство
$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\,.$$

Доказательство. Заметим, что $y = \frac{y-z}{x-z} \cdot x + \frac{x-y}{x-z} \cdot z$, откуда по определению выпуклости
$$f(y) \leqslant \frac{y-z}{x-z} \cdot f(x) + \frac{x-y}{x-z} \cdot f(z)\,.$$

Следовательно, $(x-z)\cdot f(y) \leqslant (y-z)\cdot f(x) + (x-y)\cdot f(z)$, откуда
$$(x-y)\cdot(f(x)-f(z)) \leqslant (x-z)\cdot(f(x)-f(y))\,.$$

Второе неравенство получается аналогично.

Лемма. Если f — выпуклая функция, то для любых $x_1 \geqslant x_2$, $y_1 \geqslant y_2$, $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$ имеет место неравенство
$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1} \geqslant \frac{f(x_2)-f(y_2)}{x_2-y_2}\,.$$

Доказательство. Пусть для определенности $x_1 \geqslant y_1$. Тогда по лемме о трех хордах
$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1} \geqslant \frac{f(x_2)-f(y_1)}{x_2-y_1} \geqslant \frac{f(x_2)-f(y_2)}{x_2-y_2}\,.$$

Определение. Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — набор вещественных чисел. Его *невозрастающей перестановкой* назовем набор $X^* = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$, где $x_{i_1} \geqslant x_{i_2} \geqslant \dots \geqslant x_{i_n}$ и индексы $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ являются перестановкой чисел $(1, 2, \dots, n)$.

Определение. Невозрастающий набор вещественных чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *мажорирует* невозрастающий набор вещественных чисел $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, если выполнены условия
$$\begin{gathered}
x_1 \geqslant y_1,\\
x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2,\\
\dots\\
x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geqslant y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1},\\
x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n.
\end{gathered}$$

Если X мажорирует Y, то будем писать $X \succ Y$ или $Y \prec X$.

В случае, когда X и Y — произвольные наборы чисел, мы будем говорить, что X мажорирует Y и писать $X \succ Y$ или $Y \prec X$, если для их невозрастающих перестановок X^* и Y^* верно $X^* \succ Y^*$.

Пример 1.

$$(1,0,\ldots,0) \succ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right) \succ \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\ldots,0\right) \succ \ldots \succ \left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right),$$

и вообще, если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1, то

$$\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right) \prec (x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec (1,0,\ldots,0).$$

Пример 2. Наборы $(5,5,0)$ и $(6,2,2)$ несравнимы, т. е. ни один из них не мажорирует другой.

Пример 3. Если $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, то $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \succ (\overline{x},\overline{x},\ldots,\overline{x})$.

Пример 4. Набор (x_1,x_2) мажорирует набор (y_1,y_2), если и только если $y_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ и $y_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ для некоторого $\lambda \in [0;1]$.

Неравенство Караматы. Пусть $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in (a;b),$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Тогда

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Доказательство. Центральным моментом доказательства является *преобразование Абеля*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n,$$

где $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Можно считать, что $x_k \neq y_k$ при всех k, в противном случае уберем из обеих частей слагаемые $f(x_k) = f(y_k)$. Очевидно, что мажоризация укороченных наборов сохранится. Положим

$$D_k = \frac{f(x_k) - f(y_k)}{x_k - y_k},$$
$$X_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad Y_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k.$$

Тогда условие $X \succ Y$ означает, что $X_k \geqslant Y_k$ при $k \leqslant (n-1)$ и $X_n = Y_n$, а следствие из леммы о трех хордах утверждает, что $D_k \geqslant D_{k+1}$. Стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (X_k - Y_k) \cdot (D_k - D_{k+1}) + (X_n - Y_n) \cdot D_n \geqslant 0.$$

Применим к левой части преобразование Абеля ($a_k = x_k - y_k, A_k = X_k - Y_k, b_k = D_k$), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) \cdot D_k \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(y_k)\big)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)\cdot\frac{f(x_k)-f(y_k)}{x_k-y_k}=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)\cdot D_k\geqslant 0\,.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Условие $X\succ Y$ является не только достаточным, но и необходимым.

Замечание 2. Условие выпуклости функции $f(x)$ является не только достаточным, но и необходимым.

Замечание 3. Если функция $f(x)$ выпуклая и *монотонно возрастающая,* то условие $X\succ Y$ может быть заменено более слабым, а именно равенство $X_n=Y_n$ можно заменить на $X_n\geqslant Y_n$. Докажите этот факт.

Замечание 4. Если $f(x)$ — вогнутая функция, то

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\leqslant f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_n)\,.$$

Замечание 5. При $y_1=y_2=\ldots=y_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ неравенство Караматы превращается в неравенство Йенсена для коэффициентов, равных $1/n$.

Теория чисел: показатели

Малая теорема Ферма. Если p — простое, то $a^p \equiv a \pmod p$.

Теорема Эйлера. Если НОД$(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

Определение. При $(a, m) = 1$ существует натуральное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod m$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем a по модулю m*.

1. В обозначениях из предыдущего определения:
(a) Числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ попарно несравнимы по модулю m.
(b) $a^s \equiv a^t \pmod m$ $(s, t \geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod \delta$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod m$ тогда и только, когда s делится на δ.
(c) Число δ является делителем $\varphi(m)$.

2. Найдите все простые p и q такие, что $(2^p - 1)$ делится на q, а $(2^q - 1)$ делится на p.

3. Докажите, что для любого натурального n простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

4. Докажите, что для любого натурального $a > 1$ количество правильных несократимых дробей со знаменателем $(a^n - 1)$ кратно n.

5. Докажите, что $(2^n - 1)$ не делится на n при натуральном $n > 1$.

6. Пусть $a > 1$, $p > 2$, p — простое.
(a) Докажите, что простые нечетные делители числа $(a^p - 1)$ или делят $(a - 1)$, или имеют вид $2px + 1$.
(b) Докажите, что число $(a^p - 1)/(a - 1)$ имеет хотя бы один простой множитель, не являющийся делителем $(a - 1)$.
(c) Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

7. Найдите все пары p и q такие, что $(7^p - 2^p) \cdot (7^q - 2^q)$ делится на pq.

8. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.

Геометрия

1. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, а точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Окружности с центрами в A_1, B_1, C_1, проходящие через O, пересекаются в точках D, E, F, отличных от O. Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника DEF.

2. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. На прямой BC выбраны такие точки X и Y, что четырехугольники XC_1B_1C и YB_1C_1B — вписанные. Прямые XC_1 и YB_1 пересекаются в точке Z. Докажите, что Z, I, A_1 лежат на одной прямой.

3. На меньших дугах AB и AC остроугольного треугольника ABC отметили точки C_0 и B_0 соответственно, причем $B_0C_0 \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC_0 и ACB_0 равноудалены от середины дуги BAC описанной окружности исходного треугольника.

4. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо со внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

5. В неправильном тетраэдре $ABCD$ все грани равны, O — центр его описанной сферы, H — точка пересечения высот BCD. Докажите, что $AOH \perp BCD$.

6. В треугольнике ABC провели биссектрисы BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника IMN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

Комбинаторика

1. Даны 8 гирек весом $1, 2, \ldots, 8$ грамм, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

2. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда может это сделать.

3. На отрезке AB отмечено $2n$ точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

4. Несколько ребят стоят в круг. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого четное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечетное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

5. Хроматическое число графа G равно k. Рассмотрим некоторую правильную раскраску в k цветов. Докажите, что в этом графе существует простой путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу. (Правильной раскраской вершин графа называется такая раскраска, что никакие две вершины одного цвета не смежны. Хроматическим числом графа называется такое минимальное натуральное k, что существует правильная раскраска вершин в k цветов).

6. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 2015 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (K-й и $(K+1)$-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(K-1)$-ю и $(K+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).

7. Каждые два из 21 города соединены прямым рейсом одной из четырех авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый маршрут из четырех рейсов одной авиакомпании.

Теория чисел: показатели

Версия с решениями

Малая теорема Ферма. Если p — простое, то $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Теорема Эйлера. Если НОД$(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Определение. При $(a, m) = 1$ существует натуральное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod{m}$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем a по модулю m*.

1. В обозначениях из предыдущего определения:
(a) Числа $1 = a^0, a^1, \dots, a^{\delta-1}$ попарно несравнимы по модулю m.
(b) $a^s \equiv a^t \pmod{m}$ $(s, t \geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod{\delta}$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod{m}$ тогда и только, когда s делится на δ.
(c) Число δ является делителем $\varphi(m)$.

(a) Пусть $a^s \equiv a^t \pmod{m}$. Тогда $a^t(a^{s-t} - 1)$ делится на m. То есть $(a^{s-t} - 1)$ делится на m. Но такого быть не может, поскольку $0 < s - t < \delta$.

(b) Сначала докажем, что $a^s \equiv 1 \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда s делится на δ. Пусть это не так. Тогда $s = x\delta + r$. Имеем, $1 \equiv a^s \equiv (a^\delta)^x a^r \equiv a^r \pmod{m}$. Но такого быть не может из определения показателя. Значит, $r = 0$ и s делится на δ без остатка. Отсюда сразу следует, что если $a^s \equiv a^t \pmod{m}$, то $(a^{s-t} - 1)$ делится на m, то есть $(s - t)$ делится на δ.

(c) Очевидное следствие из теоремы Эйлера и предыдущего пункта.

2. Найдите все простые p и q такие, что $(2^p - 1)$ делится на q, а $(2^q - 1)$ делится на p.

Пусть δ — показатель 2 по модулю q. Тогда p делится на δ. И поскольку δ не равно 1, то $\delta = p$. Но тогда из малой теоремы Ферма и предыдущей задачи получаем, что $(q - 1)$ делится на p, следовательно $q > p$. Абсолютно аналогично можем получить, что $p > q$. Но оба условия одновременно выполняться не могут, то есть таких p и q просто не существует.

3. Докажите, что для любого натурального n простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

Пусть $m = 2^{n+1}x + 1$. Поскольку $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{m}$, то $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{m}$. И если δ — показатель 2 по модулю n, то 2^{n+1} делится на δ. То есть $\delta = 2^k$. Но если $k < n + 1$, то $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{m}$, что не верно. Но тогда $\delta = 2^{n+1}$, и для любого простого делителя q верно, что $(q-1)$ делится на δ. Несложно видеть, что именно это мы и хотели доказать.

4. Докажите, что для любого натурального $a > 1$ количество правильных несократимых дробей со знаменателем $(a^n - 1)$ кратно n.

Очевидно, что таких дробей $\varphi(a^n - 1)$. При этом понятно, что n — порядок a по модулю $(a^n - 1)$. Но тогда условие задачи очевидно из задачи 1c.

5. Докажите, что $(2^n - 1)$ не делится на n при натуральном $n > 1$.

Случай, когда n — четно не интересен. Рассмотрим нечетное n. Предположим, что существует n, для которого условие задачи не выполнено. Рассмотрим минимальное такое n. Пусть δ — порядок 2 по модулю n. Тогда $(2^\delta - 1)$ делится на n, а значит делится на δ. И из минимальности n следует, что $\delta = n$. Но такого не бывает, поскольку δ не превосходит $\varphi(n) < n$.

6. Пусть $a > 1, p > 2, p$ — простое.
   (a) Докажите, что простые нечетные делители числа $(a^p - 1)$ или делят $(a - 1)$, или имеют вид $2px + 1$.
   (b) Докажите, что число $(a^p - 1)/(a - 1)$ имеет хотя бы один простой множитель, не являющийся делителем $(a - 1)$.
   (c) Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

(a) Пусть $(a^p - 1)$ делится на простое число q. Тогда рассмотрим δ — показатель a по модулю q. Имеем, что p делится на δ. То есть либо $\delta = 1$, либо $\delta = p$. Если $\delta = 1$, то q является делителем $(a - 1)$. Если же $\delta = p$, то $(q - 1)$ делится на p. Но при этом оно четно, а значит $(q - 1)$ делится на $2p$. Что и требовалось доказать.

(b) Пусть степень вхождения p в $(a-1)$ равна k. Покажем, что $a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+1$ не делится на p^2. Действительно, пусть $a = p^k x + 1$. Тогда

$$(p^k x + 1)^{p-1} + (p^k x + 1)^{p-2} + \ldots + (p^k x + 1) + 1 \equiv p \pmod{p^{k+1}}.$$

Но тогда если условие задачи не выполнено, то $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + 1$ не превосходит $(a - 1)$, чего не может быть.

(c) Предположим, что их конечно. Тогда подставим их произведение в $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + 1$ вместо a. Из двух предыдущих пунктов получившееся число будет иметь делитель вида $2px + 1$. Но оно взаимно просто со всеми простыми числами такого вида. Противоречие.

7. Найдите все пары p и q такие, что $(7^p - 2^p) \cdot (7^q - 2^q)$ делится на pq.

Случай 1. Пусть $7^p - 5^p$ делится на p. Тогда из малой теоремы Ферма $7^p - 2^p \equiv 7 - 2 \pmod{p}$. То есть $p = 5$. И либо $7^q - 2^q$ делится на q и $q = 5$, либо $7^5 - 2^5$ делится на q. Тогда $q \in \{5, 11, 61\}$.
Случай 2. Когда $7^q - 5^q$ делится на q; решается аналогично.
Случай 3. Осталось рассмотреть случай, когда $(7^p - 2^p)$ делится на q и $(7^q - 2^q)$ делится на p, и p и q не равны 5. Но если $(7^p - 2^p)$ делится на q, то $(7 \cdot 2^{-1})^p \equiv 1$. Но тогда p — показатель числа $7 \cdot 2^{-1}$ по модулю q, то есть $(q - 1)$ делится на p и $q > p$. Аналогично из второй делимости доказывается, что $p > q$. Противоречие. Значит, в третьем случае решений нет.

8. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2; 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.

Если $x = y$, то подходит $n = 1$, ибо $x^2 + y^2$ — четное число, большее 2. Далее мы предполагаем, что x не равно y. В этом случае мы установим, что при некотором n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ делится на 257 и не равно 257. Тогда оно будет составным, что и требуется. Предположим, что $x^{2^n} + y^{2^n} = 257$. Пусть $a = x^{2^{n-1}}$, $b = y^{2^{n-1}}$. Тогда $a^2 + b^2 = 257$, и, если $a \geqslant b$, то $a = 16$, $b = 1$ (случаи $a = 12, 13, 14, 15$ легко перебираются; если же $a \geqslant 11$, то $b^2 \geqslant a^2 < 257/2$, что невозможно). Но это противоречит условию $x, y > 1$. Итак, $x^{2^n} + y^{2^n}$ не равно 257. Осталось проверить только то, что при некотором n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ делится на 257. Поскольку y не делится на простое число 257, найдется такое натуральное q, что $x \equiv qy \pmod{257}$. Так как x не равно y и $0 < x + y < 257$, получаем, что q не сравнимо ни с 1, ни с -1 по модулю

257. Кроме того, q не делится на 257, поскольку x не делится на 257. Поскольку число 257 простое, по малой теореме Ферма число $q^{256} \equiv 1 \pmod{257}$. Тогда показатель q по модулю 257 — это степень двойки. Следовательно, найдется 2^k такое, что $q^{2^k} \equiv -1 \pmod{257}$. Но тогда и $x^{2^k} + y^{2^k}$ будет делиться на 257. Что мы и хотели доказать.

Геометрия

Версия с решениями

1. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, а точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Окружности с центрами в A_1, B_1, C_1, проходящие через O, пересекаются в точках D, E, F, отличных от O. Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника DEF.

Пусть D — отличная от O точка пересечения окружностей ω_B и ω_C с центрами B_1 и C_1 из условия; E — ω_C и ω_B; аналогично F. Достаточно показать, что DO — биссектриса угла EDF (прямые EO и FO также будут биссектрисами своих углов и O будет точкой пересечения биссектрис). Заметим, что $\angle EDO = \frac{1}{2}\angle EC_1O = \angle OC_1B_1$. Первое равенство — соотношение вписанного и центрального углов окружности ω_C, второе вытекает из равенства треугольников EC_1B_1 и OC_1B_1. Аналогично $\angle FDO = \frac{1}{2}\angle FA_1O = \angle OA_1B_1$. Общеизвестно, что центр O описанной окружности треугольника ABC является также точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, а значит $\angle OC_1B_1 = 90^\circ - \angle C_1B_1A_1 = \angle OA_1B_1$. Из выписанных равенств следует, что $\angle EDO = \angle FDO$ и что прямая DO действительно является биссектрисой угла EDF.

2. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. На прямой BC выбраны такие точки X и Y, что четырехугольники XC_1B_1C и YB_1C_1B — вписанные. Прямые XC_1 и YB_1 пересекаются в точке Z. Докажите, что Z, I, A_1 лежат на одной прямой.

Из вписанности четырехугольников из условия и равнобедренности треугольника B_1AC_1 следуют равенства углов: $\angle CXZ = \angle C_1B_1A = \angle B_1C_1A = \angle BYZ$. Следовательно, треугольник XYZ равнобедренный, $XZ = YZ$. Из сумм углов треугольников XYZ и C_1B_1A следует, что $C_1ZB_1 = C_1AB_1$, а значит точки A, C_1, B_1, Z лежат на одной окружности. Заметим, что I тоже лежит на этой окружности ($\angle AB_1I = \angle AC_1I = 90^\circ$). Более того, I — середина дуги B_1C_1, из чего вытекает, что ZI — биссектриса угла B_1ZC_1. Получили, что ZI — биссектриса равнобедренного треугольника XYZ, а значит, и высота. $ZI \perp BC$, $IA_1 \perp BC$ как угол между радиусом и касательной. Таким образом, Z, I, A_1 действительно лежат на одной прямой.

3. На меньших дугах AB и AC остроугольного треугольника ABC отметили точки C_0 и B_0 соответственно, причем $B_0C_0 \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC_0 и ACB_0 равноудалены от середины дуги BAC описанной окружности исходного треугольника.

Лемма (о трилистнике). В треугольнике ABC с центром вписанной окружности I и серединой A_0 дуги BC описанной окружности треугольника ABC выполнено равенство $BA_0 = IA_0 = CA_0$.
Используем ее далее без доказательства.

Отметим середины P и Q меньших дуг BC_0 и CB_0 соответственно, I_C и I_B — центры вписанных окружностей треугольников ABC_0 и ACB_0. Воспользуемся леммой (для треугольников ABC_0 и ACB_0): $PB = PI_C = PC_0$, $QC = QI_B = QB_0$. Из параллельности BC и B_0C_0 вытекает равенство дуг BC_0 и CB_0, откуда следует, что все шесть отрезков из предыдущего предложения равны между собой. В частности, $PI_C = QI_B$. Обозначим середину дуги BAC описанной окружности исходного треугольника X, и рассмотрим треугольники XPI_C и XQI_B. Они равны: $PI_C = QI_B$ доказано ранее; $XP = XQ$, что легко вывести из равенства соответствующих дуг описанной окружности; $\angle XPI_C = \angle XQI_B$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AX. Следовательно, $XI_C = XI_B$, что и требовалось доказать.

4. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо со внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

Заметим, что точка X принадлежит кольцу с центром O тогда и только тогда, когда точка O принадлежит такому же кольцу с центром X. Поэтому достаточно доказать, что если построить кольца с центрами в данных точках, то одну из точек плоскости покроет не менее 10 колец. Рассматриваемые кольца лежат внутри круга радиуса $16 + 3 = 19$, площадь которого равна $19^2\pi = 361\pi$. В предположении противного (если все точки плоскости покрыты не более 9 раз) суммарная площадь колец не превосходит $9 \cdot 361\pi = 3249\pi$. Но суммарная площадь колец равна $650 \cdot (3^2 - 2^2)\pi = 3250\pi$, противоречие.

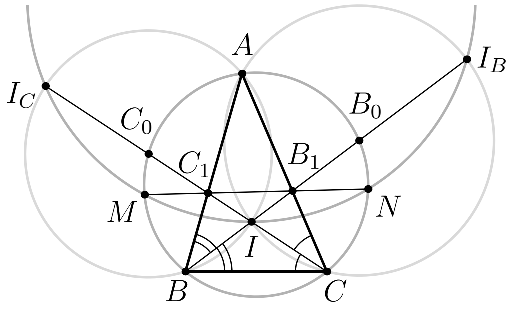
5. В неправильном тетраэдре $ABCD$ все грани равны, O — центр его описанной сферы, H — точка пересечения высот BCD. Докажите, что $AOH \perp BCD$.

Ясно, что из равногранности тетраэдра следует, что $AB = CD$, $BC = AD$, $AC = BD$. Опустим перпендикуляры из точек A, O, H на ребро BC, основания обозначим A_D, O_D, H_D соответственно. Раз O — центр описанной сферы, то $OB = OC$ и O_D — середина BC. Треугольники ABC и DCB равны, а значит отрезки A_DB и H_DC тоже равны как соответственные элементы равных фигур. Получили, что O_D — середина A_DH_D. Аналогичное утверждения можно сформулировать для проекций тех же точек на ребра CD, DB.

Спроецируем точки A и O на плоскость BCD ортогонально, получим A' и O'. O' — центр описанной окружности треугольника BCD как проекция центра сферы. Что касается точки A', то по теореме о трех перпендикулярах $A'A_D \perp BC$ (так как $AA' \perp BCD$ и $AA_D \perp BC$). Аналогично, $A'A_C \perp BD$ и $A'A_B \perp CD$. Рассмотрим точку X', симметричную H относительно O'. Докажем, что $X = A'$. Действительно, по теореме Фалеса для проекций точек O', H, X на сторону BC треугольника BCD должно быть выполнено $H_DO_D = X_DO_D$, т. е. $X_D = A_D$, проекции точек X и A' на сторону BC совпадают. То же самое верно и для остальных сторон треугольника, а по трем своим проекциям на стороны треугольника любая точка плоскости восстанавливается однозначно. Следовательно, $X = A'$. Точки A, O, H про проекции попали на одну прямую, а значит, они лежали в плоскости, перпендикулярной BCD.

6. В треугольнике ABC провели биссектрисы BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника IMN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

Лемма (о трилистнике, усиленная). Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, I_A — центр вневписанной окружности (касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC). A_0 — середина дуги BC описанной окружности треугольника. Тогда $BA_0 = IA_0 = CA_0 = I_AA_0$.
Используем ее далее без доказательства.



Продлим биссектрисы BB_1 и CC_1 до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC, точки пересечения обозначим B_0 и C_0 соответственно. Обозначим также центры вневписанных окружностей, соответствующих вершинам B и C, буквами I_B и I_C соответственно. Тогда из леммы о трилистнике и принадлежности точек I_B и B_0 биссектрисе угла B вытекает, что $II_B = 2IB_0$, и аналогично $II_C = 2IC_0$. Кроме того, треугольники AB_0C_0 и IB_0C_0 равны по трем сторонам (еще одно следствие трилистника), а значит и равны их радиусы описанных окружностей. Треугольники IB_0C_0 и II_BI_C подобны с коэффициентом 2, радиусы их описанных окружностей относятся так же. Остается доказать, что радиусы описанных окружностей треугольников IMN и II_BI_C равны. Для этого покажем, что точки I, M, N, I_B, I_C лежат на одной окружности.

Обозначим точки пересечения описанных окружностей треугольников ABC и II_BI_C за M' и N'. Тогда достаточно показать, что отрезки MN и $M'N'$ совпадают; а для этого, в свою очередь, достаточно показать, что точки B_1 и C_1 лежат на прямой $M'N'$, то есть на радикальной оси описанных окружностей треугольников ABC и II_BI_C.

Из леммы о трилистнике следует, что точки I, I_B, A и C лежат на одной окружности — обозначим ее ω_B. Заметим, что B_1 лежит на радикальной оси окружностей ABC и ω_B, а также на радикальной оси окружностей II_BI_C и ω_B. Следовательно, B_1 — радикальный центр упомянутых трех окружностей, и лежит на радикальной оси ABC и II_BI_C. Аналогично для C_1.

Комбинаторика

Версия с решениями

1. Даны 8 гирек весом 1, 2, … , 8 грамм, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

Ответ: не обманывает.

Заметим, что сумма весов пяти гирек не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ г, а сумма весов двух гирек не более $7 + 8 = 15$ г, причем только в случае этих наборов две гирьки уравновесят пять. Следовательно, если барон положит на одну чашку весов две гирьки, а на другую пять, и весы установятся в равновесии, то он сможет утверждать, что осталась гирька весом 6 г.

2. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда может это сделать.

Рассмотрим граф, в котором вершинами являются вокзал, площадь и перекрестки Москвы, а ребрами улицы по которым турист проходил нечетное число раз, идя от вокзала до площади. Вершину, соответствующую площади обозначим через A, вокзалу — B. Заметим, что степень каждой вершины, соответствующей перекрестку четна, а вершин A и B — нечетна. Действительно, пусть есть некоторый перекресток C. В пути туриста от вокзала до площади, сколько раз он заходил на перекресток C столько и выходил, значит суммарное число проходов по улицам выходящим из перекрестка C — четна, поэтому и число улиц выходящих из C по которым турист проходил нечетное число раз — тоже четно. Аналогично получаем, что степени вершин A и B нечетны (в случае, например, с вокзалом, выходил турист из него на один раз больше в пути чем заходил). Отсюда в получившемся графе существует эйлеров путь, причем концами этого пути будут вершины A и B, значит от A до B можно добраться по ребрам, что и требовалось.

3. На отрезке AB отмечено $2n$ точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

Обозначим середину отрезка AB через O, из условия, по обе стороны от точки O находится по n отмеченных точек (пусть также точка A находится левее точки B). Заметим, что если слева от точки O все отмеченные точки красные, то тогда справа от точки O все отмеченные точки — синие и задача очевидна. Обозначим сумму расстояний от точки A до красных S_A, сумму расстояний от B до синих — S_B. Теперь пусть слева от точки O есть хотя бы одна синяя точка X, тогда справа от точки O есть хотя бы одна красная точка Y, поменяем их местами.

Тогда обе суммы S_A и S_B уменьшатся на $|XY|$, то есть разность $S_A - S_B$ не изменится. Такими операциями мы придем к ситуации, когда слева от точки O только красные отмеченные точки, справа — только синие, но в этом случае $S_A - S_B = 0$, значит всегда $S_A = S_B$, что и требовалось.

4. Несколько ребят стоят в круг. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого четное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечетное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

Пусть $2m$ — наибольшее, а $2n$ — наименьшее количество конфет у одного человека. После одного круга обмена и, возможно, добавления конфет извне, m не увеличится, а количество людей, имеющих $2n$ конфет, уменьшится. (Действительно, каждый человек оставляет себе не более m конфет, а получает не более $m + 1$ конфеты. Причем, если он получил $m + 1$ конфету, то одна из них была добавлена извне, значит, после получения m конфет у него стало не более $2m - 1$ конфеты. С другой стороны, если $m > n$, среди людей имевших $2n$ конфет, найдется человек, который получит более n конфет.) Значит, через несколько шагов n увеличится. Так как n увеличивается, а m не увеличивается, наступит момент, когда n станет равным m.

5. Хроматическое число графа G равно k. Рассмотрим некоторую правильную раскраску в k цветов. Докажите, что в этом графе существует простой путь, вдоль которого встречаются вершины всех k цветов ровно по одному разу. (Правильной раскраской вершин графа называется такая раскраска, что никакие две вершины одного цвета не смежны. Хроматическим числом графа называется такое минимальное натуральное k, что существует правильная раскраска вершин в k цветов).

Цвета, в которые покрашен граф, занумеруем числами от 1 до k. Те вершины цвета 2, которые не соседствуют ни с какими вершинами цвета 1, перекрасим в цвет 1. Новая раскраска будет правильной, поэтому в ней k цветов. Значит, какие-то вершины цвета 2 не перекрашены и потому соседствуют с вершинами цвета 1. Затем, вершины цвета 3, которые не соседствуют с вершинами цвета 2, не перекрашенными в цвет 1, перекрасим в цвет 2, и т. д. вплоть до последнего цвета. На каждом шаге получается правильная раскраска, поэтому хотя бы одна из вершин каждого цвета останется неперекрашенной. После этого рассмотрим какую-либо вершину цвета k. Она не перекрашена, и потому соседствует с вершиной цвета $(k - 1)$. Эта вершина тоже не перекрашена, так как иначе ее первоначальный цвет был бы k, и она вначале соседствовала бы с вершиной того же цвета, что невозможно. Раз вершина не перекрашена, то она соседствует с вершиной цвета $(k-2)$, и т. д. Продолжая этот процесс, построим путь длины k из вершин k цветов, которые не были перекрашены.

6. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 2015 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (K-й и $(K + 1)$-й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(K - 1)$-ю и $(K + 2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).

Рассмотрим произвольные три подряд идущие комнаты (с номерами n, $n+1$, $n+2$). Если в одной из них когда-нибудь окажется пианист, то эта тройка комнат уже никогда не опустеет: чтобы покинуть эту тройку, пианист должен переселиться из n-й комнаты в $(n-1)$-ю (или из $(n+2)$-й в $(n+3)$-ю, что симметрично), но тогда кто-то переселяется из $(n+1)$-й в $(n+2)$-ю, и на этом шаге рассматриваемая тройка комнат непуста. Разобьем весь коридор на такие тройки. Количество «занятых» троек не превосходит 9, и «занятые» тройки не освобождаются, следовательно, пианисты никогда не покидают некоторую ограниченную часть коридора. С другой стороны, сумма квадратов номеров комнат, в которых живут пианисты (с учетом кратности) при каждом переселении возрастает, поскольку $k^2+(k+1)^2<(k-1)^2+(k+2)^2$. Значит, когда-нибудь переселения прекратятся.

7. Каждые два из 21 города соединены прямым рейсом одной из четырех авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый маршрут из четырех рейсов одной авиакомпании.

Все маршруты образуют полный граф на 21 вершине, ребра которого раскрашены в 4 цвета. Если искомого замкнутого маршрута нет, любые две вершины этого графа связаны не более чем одним одноцветным маршрутом длины 2. Стало быть, всего таких маршрутов не более, чем $4C_{21}^2=840$. С другой стороны, пусть из данной вершины выходит a, b, c и d ребер первого, второго, третьего и четвертого цветов соответственно. Тогда число одноцветных маршрутов длины 2, для которых эта вершина — средняя, равно

$$\frac{a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1)}{2}=$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)}{2}=$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}-10\,.$$

По неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим имеем: $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant(a+b+c+d)^2/4=100$. Таким образом, каждая вершина нашего графа является средней минимум для $100/2-10=40$ одноцветных маршрутов, причем минимум достигается только в случае, когда из вершины выходит ровно по 5 маршрутов каждого цвета. И только в этом случае сумма количеств одноцветных маршрутов длины 2 по всем вершинам равна 840, в остальных — больше. Но такой случай невозможен, потому что тогда, оставив в нашем графе только ребра одного какого-то цвета, мы получили бы граф с нечетным числом нечетных вершин.