Доказывать утверждение не для чисел, а для многочленов

Часто какое-либо утверждение, сформулированное для чисел, полезно сформулировать для многочленов или для рациональных функций. В частности, такой подход полезен в конструктивах: равенство многочленов даёт целую серию равенств при подстановках различных значений.

1. Докажите, что для любых различных рациональных чисел a, b, c, число

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$$

является квадратом рационального числа.

2. *(Финал Всероса, 2006.9.2)* Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c, d, по модулю больших 1000000, что $1/a+1/b+1/c+1/d=1/abcd$.

3. *(Городской этап Санкт-Петербургской олимпиады, 2003.7.7)* Докажите, что существуют такие натуральные a, b, c, большие 1, что

$(a^2-1) \,\vdots\, b,\ (b^2-1) \,\vdots\, c,\ (c^2-1) \,\vdots\, a$ и $a+b+c>2018$.

4. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\cdots\pm\sqrt{2019}$ является целым числом.

5. *(IMO, 2002.3)* Найдите все пары натуральных чисел $m\geqslant 3, n\geqslant 3$, для которых существует бесконечно много таких натуральных a, что число $\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ – целое.

Теорема Виета

Основная идея этого раздела – рассмотреть многочлен, набором корней которого служит заданный набор чисел. Эту идею можно использовать как для многочленов над $\mathbb{R}$, так и для многочленов над $\mathbb{F}_p$.

6. Вещественные числа a, b, c таковы, что $a+b+c>0, ab+bc+ac>0, abc>0$. Докажите, что $a, b, c>0$.

7. Можно ли подобрать три действительных числа так, чтобы их сумма была равна числу a, сумма попарных произведений была равна числу a^2, а произведение равно числу a^3?

8. Целые числа a, b и c таковы, что числа $a/b+b/c+c/a$ и $a/c+c/b+b/a$ тоже целые. Докажите, что $|a|=|b|=|c|$.

9. Пусть p – простое число, $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ – k-й элементарный симметрический многочлен от p переменных (сумма всевозможных произведений по k различных множителей; $1\leqslant k\leqslant p$).
(a) Докажите, что при всех $k\neq p-1$ $e_k(1, 2, \ldots, p)$ делится на p.
(b) Докажите теорему Вильсона.
(c) Докажите, что при $p>3$ сумма всех квадратичных вычетов по модулю p сравнима с нулём по модулю p.

10. Пусть p – нечётное простое. Про целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ известно, что $a_1^k+a_2^k+\ldots+a_p^k$ делится на p при любом натуральном k. Докажите, что все a_i числа попарно сравнимы по модулю p.

11. Дано нечётное простое число p. Целые числа $a_1, \ldots, a_p$ таковы, что сумма $a_1^i+\ldots+a_p^i$ кратна p при каждом $i=1, 2, \ldots, s$. При каком наименьшем s из этого следует, что числа $a_1, \ldots, a_p$ дают либо одинаковые, либо попарно различные остатки при делении на p?

Переформулировать условие в терминах многочленов

Эта идея нередко бывает полезна в задачах по комбинаторике.

12. Множество, состоящее из миллиона подряд идущих натуральных чисел, назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества, произведения элементов в которых равны. Конечно или бесконечно число хороших множеств?

13. *(Турнир, осень 2014, сложный вариант 10-11, задача 3)* Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

14. *(Городской этап Санкт-Петербургской олимпиады, 2003.10.7)* Дано простое число p и натуральное число $n\geqslant p$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольный набор натуральных чисел, а f_k – количество k-элементных подмножеств этого набора, сумма чисел в которых делится на p. Докажите, что $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k \,\vdots\, p$. (Мы считаем, что $f_0=1$.)

15. По кругу выписаны n чисел $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}$ $(a_i\in\mathbb{Z}_n)$. За один ход разрешается выбрать целое число $0\leqslant s<n$ и заменить все числа по правилу $a_i'=a_i-a_{s+i}$, где a_i' -— новое значение a_i. Докажите, что вне зависимости от стартового набора чисел и от выбора параметра s на каждом ходу (на разных ходах параметр s может быть разным), рано или поздно все числа a_i станут кратными n, если **(a)** $n=p$; **(b)** $n=p^k$ (k – натуральное, p – простое).