Часть 1. Декомпозиция.

1-1. Китайская теорема об остатках.

1-2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

1-3(Целозначные многочлены). Многочлен $p(x)$ (с действительными коэффициентами) называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x

а) Докажите, что многочлен $\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ является целозначным.

б) Докажите, что многочлен является целозначным тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{2!} + a_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + a_n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые.

в) Какую наименьшую степень может иметь *унитарный* (то есть с единичным старшим коэффициентом) многочлен $f(x)$, такой что $f(a)$ делится на 100 при любом целом a.

г) Среди многочленов степени не выше n с целыми коэффициентами некоторые особенно раздражают Владимира Алексеевича, причем сумма и разность двух раздражающих многочленов сама является раздражающей. Докажите, что из раздражающих многочленов можно выбрать $n+1$ так, что любой раздражающий многочлен представляется как линейная комбинация выбранных с целыми коэффициентами.

1-4. Будем называть многочлен $p(x)$ почти целозначным, если $p(2^k)$ — целое число для любого целого неотрицательного k.

а) Докажите, что многочлен $p_k(x) = 2^{-k(k-1)/2} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2^{k-1})}{(2-1)(2^2-1)\cdots(2^k-1)}$ является почти целозначным. (**Подсказка:** $p_k(2^{n+1}) = p_k(2^n) + 2^{n-k+1} p_{k-1}(2^n)$).

б) Сформулируйте и докажите аналог утверждения б) из задачи 4.

1-5(Iran TST 2019). В полном графе некоторые рёбра покрашены в красный, остальные — в чёрный. Назовём весом треугольника сумму чисел в его рёбрах Докажите, что можно написать на каждом ребре числа так, чтобы для каждого чёрного ребра сумма весов треугольников, содержащих его была равна нулю, а для каждого красного аналогичная сумма была равна 1.

Часть 2. Декомпозиция и процессы.

2-1. Линейные рекурренты.

2-2. Натуральное число n не делится на 3. По кругу сидят n хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно от испуга перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что рано или поздно все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.

2-3(Олимпиада мегаполисов 2019). В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор *подписчиков* среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

2-4(Модификация прошлой). В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор *подписчиков* среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.
Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей стали равны 0. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и изменить его рейтинг как угодно (в частности оставить тем же). Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

Часть 3. Системы линейных уравнений.

Определение. Две системы линейных уравнений (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Определение Рассмотрим *элементарные преобразования* системы линейных уравнений трех типов:

ЭП1. к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2. строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3. меняем местами две строки.

3-1. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти системы эквивалентны.

3-2. Метод Гаусса. При помощи ЭП1-ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{1e}x_e + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & = & d_1 \\ b_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + b_{2n}x_n & = & d_2 \\ b_{3l}x_l + \cdots\cdots + b_{3n}x_n & = & d_3 \\ \ddots \qquad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n & = & d_r \\ 0 & = & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & d_m \end{array}\right. ,$$

где $b_{1e}b_{2k}b_{3l}\ldots b_{rs} \neq 0$, $e < k < l < \cdots < s$.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все правые части равны 0.

3-3. Как найти все решения системы линейных уравнений? Сколько их вообще может быть?

3-4. Докажите, что если в однородной системе неизвестных больше, чем уравнений, то у неё есть ненулевое решение.

Определение. Систему линейных уравнений, у которой уравнений столько же, сколько неизвестных, будем называть *квадратной*.

3-5. а) Докажите, что если у квадратной однородной системы не одно решение, то одно из её уравнений *следует* из остальных, то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных. б) В однородной системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных. Докажите, что если не все решения пропорциональны, то одно из уравнений следует из остальных.

в) На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка, проходящая через них.

3-6. Теорема о девяти точках на кубической кривой. На плоскости проведены три красные и три синие прямые и отмечено 9 точек пересечения разноцветных прямых (будем считать, что все эти точки существуют и различны). Тогда, если восемь из этих точек лежат на кривой, заданной многочленом третьей степени, то и девятая точка также лежит на этой кривой.

а) Выведите из теоремы о девяти точках на кубической кривой следующие утверждения.

Теорема Паскаля: Точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$ расположены на окружности, так что прямые 12 и 45 пересекаются в точке A, прямые 23 и 56 пересекаются в точке B, а прямые 34 и 61 — в точке C. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой.

Теорема Паппа: Точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$ расположены на двух прямых ($1, 3, 5$ — на первой, $2, 4, 6$ — на второй) так что прямые 12 и 45 пересекаются в точке A, прямые 23 и 56 пересекаются в точке B, а прямые 34 и 61 - в точке C. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой.

б) Докажите, что никакое из линейных уравнений на коэффициенты не следует из семи остальных и выведите отсюда теорему о девяти точках на кубической кривой.

Часть 4. Связь решений однородной и неоднородной системы.

4-1. а) Докажите, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством пространства строк, а его размерность равна количеству параметров в ступенчатом виде.
б) Верно ли, что любое подпространство пространства строк является множеством решений некоторой однородной системы?
в)Для данного подпространства $U \subset V$ обозначим $U^\perp$ подпространство векторов, перпедникулярных всем векторам пространства V. Как связаны размерности U, $U^\perp$ и V?

4-2.а) Докажите, что разность любых двух решений неоднородной системы является решением однородной системы.
б) Докажите, что у неоднородной системы либо нет решений, либо их столько же, сколько у однородной.

4-3. Имеется клетчатая таблица $(k + 2) \times (l + 2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

Часть 5. Системы линейных уравнений. Интересные приложения.

5-1. Кооперативная теория игр. Вектор Шепли. В силиконовой долине собралась группа из n друзей. Про любое подмножество из них известно, сколько денег они смогут заработать, если организуют свой стартап. Они поняли, что выгоднее всего объединиться всем вместе. Встал вопрос о том, как делить потенциальную прибыль. По большому счёту нужно построить отображение $S\colon \mathbb{R}^{2^n-1} \to \mathbb{R}^n$, чтобы были выполнены свойства:

- S — линейное (ну а вы что думали?);

- Равнозначные люди получают поровну.

- Те, кто не меняют прибыль при добавлении к любому подмножеству, ничего не получают.

Докажите, что есть только одно такое отображение и найдите, сколько должен получить каждый работник, если среди них есть менеджер, без которого никто не заработает ничего, и разработчики, при этом менеджер вместе с k разработчиками заработают k^2 миллиардов долларов.

5-2. Электрические цепи.

Определение. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (*вход*) и t (*выход*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geqslant 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — сеть, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Множество $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$ называется множеством *стрелок* сети G.

Определение. Пусть G — сеть. Функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *потоком* в сети G, если f удовлетворяет трем условиям для любых $x, y \in V$ и $v \in V \setminus \{s, t\}$:

$$f(x, y) \leqslant c(x, y), \quad f(x, y) = -f(y, x), \quad \sum_{z \in V} f(v, z) = 0.$$

Рассмотрим граф G, выделим в нём вершины u и v. На каждом ребре e введём положительное сопротивление $r(e)$. Рассмотрим единичный поток в сети с истоком u и стоком v (считаем, что у каждого ребра пропускная способность 1 в обе стороны, между несмежными вершинами пропускная способность равна 0). В дополнение к обычным условиям на поток, потребуем ещё одно **правило Кирхгофа:** *для любого цикла с рёбрами* $e_1, \dots a_n$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot r(e_k) = 0.$$

Для каждого простого пути p из u в v обозначим $R(p) = \sum\limits_{e \in p} r(e)$ — сопротивление пути.

Обозначим $N = \sum\limits_{\text{по всем простым путям } p} R(p)$.

Для каждого ребра e посчитаем $N(e) = \sum\limits_{p : e \in p} R(p)$.

Докажите, что для любого ребра e верно равенство $f(e) = \frac{N(e)}{N}$.

Часть 6. Иррациональные решения системы.

6-1. Докажите, что если все коэффициенты в системе линейных уравнений – рациональные числа, и у системы есть хотя бы одно решение, то есть и рациональное решение.

6-2. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

6-3. Квадрат со стороной 1 разрезан на квадраты. Докажите, что сторона каждого квадрата рациональна.

6-4. У лаборанта есть 101 гирька. Оказалось, что если отложить любую гирьку, то остальные можно разложить на две группы по 50 равной массы. Докажите, что массы всех гирь равны, если массы гирь
а) натуральные; б) рациональные; в) действительные.

Часть 7. Пространства. Размерности.

Определение. Дано векторное пространство V над полем F. Назовём множество векторов E *линейно независимым*, если нельзя выбрать $e_1, e_2 \dots e_n \in E$ и ненулевые $c_1, c_2 \dots c_n \in F$ такие, что $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = 0$.

Назовём множество векторов $E \subset V$ *порождающим*, если для любого вектора $v \in V$ существуют такие $e_1, e_2 \dots e_n \in E$ и $a_1, a_2 \dots a_n \in F$, что $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = v$.

Порождающее и линейно независимое множество будем называть *базисом* пространства V.

Назовём множество $U \subset V$ *подпространством* пространства V, если оно само по себе является линейным пространством над тем же полем.

Назовём пространство *конечномерным*, если любое бесконечное множество векторов является линейно зависимым.

7-1. Докажите, что конечное множество $\{e_1, e_2 \dots e_n\}$ является линейно независимым тогда и только тогда, когда равенство $a_1e_1 + \dots a_ne_n = 0$ равносильно тому, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

7-2. Основная лемма о линейной зависимости. Даны натуральные числа $m > n$. Даны векторы $e_1, e_2 \dots e_n$, через них выражены векторы $v_1, v_2 \dots v_m$. Докажите, что они линейно зависимы.

7-3. Докажите, что если у линейного пространства есть базис из n векторов, то любой его базис содержит ровно n векторов.

Мощность базиса линейного пространства называется его *размерностью.*

7-4. Чему равна размерность пространства:
(a) многочленов от одной переменной;
(b) симметрических многочленов от k переменных степени не более n;
(c) последовательностей $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$?

7-5. Докажите, что любое линейно независимое множество конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

Самое собой, слово "конечномерного" можно убрать, но доказывать мы этого не будем.

7-6. Есть n не горящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются)
а) Докажите, что если $k < n$, то при любом соединени между лампочками и выключателями найдётся комбинация горящих лампочек, которую нельзя получить.
б) Докажите, что если $k > n$, то при любом соединении можно нажать на некоторые выключатели так, чтобы ни одна лампочка в итоге не загорелась.

7-7. Петя вписал числа в клетки квадрата 3×3 так, что получился магический квадрат. Числа в каком наименьшем количестве клеток должен узнать Вася, чтобы восстановить весь квадрат?

7-8. Докажите, что у пространства бесконечных последовательностей над полем F нет счётного базиса.

7-9. Сколькими способами можно соединить n лампочек и k выключателей, чтобы любая комбинация лампочек была достижима?

7-10*. Дано натуральное n. В каждой вершине связного n-вершинного графа находится лампочка, в начале все они выключены. Операцией с вершиной v называется переключение состояния лампочки в этой вершине и во всех, соединенных с ней ребром. Назовем множество вершин *полным*, если после применения операции по разу ко всем вершинам этого множества все лампочки оказываются включенными. Чему может равняться количество полных множеств? (Перечислите все варианты.)

Часть 8. Про многомерные пространства.

В обозримом мире нам кажется, что мы понимаем что-то про двухмерное пространство (плоскость) и трёхмерное. После введения декартовой системы координат кажется естественным думать и о пространствах большей размерности, как о множестве строк из n *координат. Будем обозначать такое пространство* $\mathbb{R}^n$.
Расстояние между двумя точками $X = (x_1, x_2 \dots x_n)$ *и* $Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ *определим*

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ *и* $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)$ *определим*

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots u_n v_n.$$

8-1. Докажите неравенство треугольника в $\mathbb{R}^n$

8-2. Как определять углы в $\mathbb{R}^n$?

8-3. Какое наибольшее количество векторов можно выбрать в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы любые два из них
а) были перпендикулярны;
б) образовывали тупой угол.

8-4. В n-мерном пространстве выбраны k точек, попарные расстояния между которыми равны 1. Докажите, что *центр масс* этих точек равноудалён от них.

8-5. Докажите, что в n-мерном пространстве нельзя расположить $(n+2)$ точки, попарные расстояния между которыми равны 1.

8-6. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. Карлсон считает завтрак правильным, если во время него он съедает поровну варенья из каких-то 100 банок и не трогает остальные. Докажите, что Карлсон может съесть все варенье за несколько правильных завтраков.

Часть 9. Линейная независимость.

9-1. В университете проводится n лекций, их посещают m студентов. Каждый студент посетил нечётное число лекций, а любые два студента вместе побывали на чётном числе лекций. Докажите, что $n \geqslant m$.

9-2. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2016-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело нечётный размер?

9-3. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть?

9-4*. В графе 128 вершин. На каждом ребре написан вес. За один вопрос можно покрасить вершины в два цвета узнать сумму весов на разноцветных рёбрах. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму всех весов?

Часть 10. Ортогональные дополнения.

Определение. Дано подпространство $U \in V$. Определим множество

$U^{\perp} = \{v \in V | v \perp u \forall u \in U\}$.

10-1. а) Докажите, что U^{perp} тоже является подпространством.
б) Обозначим $dimV = n$, $dimU = k$. Чему равна размерность $U^{\perp}$?

10-2. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2018-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело чётный размер?

10-3. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2019-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было нечётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело нечётный размер?

10-4. а) Предположим, что

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^3 + (a_2x + b_2y + c_2z)^3 + (a_3x + b_3y + c_3z)^3 = xyz.$$

Докажите, что $\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ перпендикулярны.

б) Найдите здесь 15 пар взаимно перпендикулярных векторов.

в) В виде какого наименьшего числа кубов однородных линейных функций можно представить многочлен xyz?

10-5(СПБ-2009). У квадратных трёхчленов $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $f(x)+g(x)$, $g(x)+h(x)$ и $f(x)+h(x)$ дискриминанты равны 1. Докажите, что $f(x)+g(x)+h(x)$ — нулевой многочлен.

Часть 11. Помощь в конструктивах.

11-1. Докажите, что рёбра полного графа на 16 вершинах можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы не было одноцветных треугольников.

11-2. 16 команд участвуют в футбольном первенстве. Оно проходит в несколько этапов. На каждом этапе какие-то 6 команд играют между собой однокруговой турнир. Могло ли оказаться, что после нескольких таких этапов все команды сыграют друг с другом по 2 раза?

11-3. Можно ли в 15-элементном множестве выбрать 15 семиэлементных подмножеств так, чтобы любые два из них пересекались по трём элементам, а любые три пересекались не более чем по одному?

11-4.а) *Конечной проективной* плоскостью порядка n назовём набор из n^2+n+1 точки и n^2+n+1 прямой такой, что через любые две точки проходит единственная прямая и любые две прямые пересекаются ровно в одной точке, причём существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что если n простое, то конечная проективная плоскость существует.
б) Какое наибольшее количество клеток в квадрате 57×57 можно закрасить так, чтобы никакие 4 не были вершинами прямоугольника?
в) Та же задача для доски $p^4 + p^2 + 1 \times p^4 + p^2 + 1$.

Часть 12. Операторы.

Даны два линейных пространства U и V над полем F. Отображение $f\colon U \longrightarrow V$ назовём *линейным*, если для любых $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in F$ выполнено равенство $f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$.

Линейное отображение из пространства V в себя будем называть *оператором*.

Интересная задача. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены числа так, что число в каждой клетке равно среднему арифметическому соседей.
(d) Верно ли, что все числа равны?
(e) Пьер-Симон знал все числа в клетках, у которых обе координаты чётные, а потом забыл число в клетке $(0, 0)$. Сможет ли он его восстановить?

Обозначим H линейное пространство из упражнения **(f)** . Рассмотрим оператор $L\colon H \longrightarrow H$, сдвигающий расстановку на одну клетку влево, оператор U, сдвигающий расстановку на одну клетку вверх, оператор E — тождественное отображение и оператор 0 — нулевое отображение.

12-1. а) Что такое L^2U^2 и U^2L^2?
б) Докажите, что $L + U + L^{-1} + U^{-1} - 4E = 0$.
в) Напишите выражение, содержащее L и H только в чётных степенях, равное нулевому оператору.
г)Напишите короткую формулу, как Пьеру-Симону найти число в клетке $(0; 0)$.

Определение: *Матрицей* будем называть таблицу $m \times n$, заполненную элементами F. Если A — матрица, то через A_{ij} обозначается элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Определение: *Матрицу линейного отображения* $f\colon U \to V$ в базисах $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$, $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ зададим так: в столбце под номером i записаны координаты $f(u_i)$ в базисе $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

12-2. Рассмотрим операторы $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, записываемые в базисе e_1, e_2 как $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ соответственно.
а) Какой матрицей задаётся оператор $f_1 \circ f_2$?
б) Какой матрицей будет записываться оператор f_1 в базисе $2e_1 + e_2, e_1 - e_2$?
в) Может ли в каком-то базисе матрица оператора f_2 записываться $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

1) Сложение матриц: Если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ — матрицы одинаковой формы $m \times n$, то матрица $A + B$ также имеет форму $m \times n$ и определяется посредством $(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$.

2) Умножение матрицы на элемент поля: Если $A = (A_{ij})$ — матрица формы $m \times n$ и $\lambda \in F$, то то матрица λA также имеет форму $m \times n$ и определяется посредством $(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$.

3) Произведение матриц: Если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ — матрицы формы $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, то матрица AB будет иметь форму $m \times k$, причем $(AB)_{ij}$ определяется как «скалярное» произведение вектора, образованного i-й строкой матрицы A и j-м столбцом матрицы B.

12-3. Найдите квадратную матрицу E размера $n \times n$, такую что $EX = XE = X$ для любой другой матрицы X размера $n \times n$ (над произвольным полем F). Такая матрица называется *единичной*. Существует ли еще одна матрица с подобным свойством?

12-4. Докажите ассоциативность умножения матриц: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ для матриц A, B и C формы $m \times n$, $n \times k$ и $k \times \ell$ соответственно.

12-5. Докажите, что в левом верхнем углу матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ стоит $n + 1$-е число Фибоначчи (последовательность Фибоначчи $\{F_n\}$ задана начальным условием $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n \geqslant 3$).

Определение: *Матрицей смежности* графа G (без петель и кратных ребер), вершины которого пронумерованы числами от 1 до n называется матрица A размера $n \times n$, такая что $A_{ij} = 1$, если i и j соединены ребром, и $A_{ij} = 0$ в противном случае.

12-6. Докажите, что $(A^k)_{ij}$ -количество маршрутов длины k в графе G, начинающихся в вершине с номером i и заканчивающихся в вершине с номером j.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется *группой* $(G, *)$, если выполнены следующие аксиомы:
1) **(ассоциативность)** для любых $a, b, c \in G$ имеет место $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2) **(существование нейтрального элемента)** существует элемент $e \in G$ такой, что для любого $a \in G$ выполнено $e * a = a * e = a$;
3) **(существование обратного элемента)** для любого элемента $a \in G$ существует элемент b такой, что $a * b = b * a = e$.

Определение. Группа G с операцией $*$ называется *коммутативной* (или *абелевой*), если

$$\forall a, b \in G \quad a * b = b * a.$$

Определение. Дана квадратной матрицы A размера $n \times n$. Матрица X называется *обратной к матрице* A, если $AX = XA = E$. Обычно её обозначают A^{-1}. Из первой задачи даже следует, что такое обозначение корректно.

Определение Матрицы, для которых существует обратная, называются обратимыми.

Определение Дана матрица A размера $m \times n$. Определим матрицу A^T (транспонированную): $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$.

12-7. а) Докажите, что обратная матрица единственная.
б) Докажите, что если $AB = E$, то и $BA = E$.

12-8. Докажите, что:
а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
б) $(AB)^T = B^T A^T$;
в) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Определение. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если $AA^T = E$.

12-9. Докажите, что ортогональные матрицы размера $n \times n$ образуют группу по умножению.

Часть 13. Секретные Матрицы.

1. В клетках квадрата 8×8 расставлены 1 и -1. Оказалось, что любые две строки совпадают ровно в четырёх столбцах. Докажите, что у любые два столбца совпадают ровно в четырёх разрядах.

2. В компании 16 мальчиков и 16 девочек. Для любых двух мальчиков есть ровно 8 девочек, которых знает ровно один из них. Докажите, что для любых двух девочек есть ровно 8 мальчиков, которых знает ровно одна из них.

3. В таблице $3n\times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов — столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк — строка с n нулями, n единицами и n двойками.

4. а) В школе поровну мальчиков и девочек. Известно, что у любого мальчика k знакомых девочек, а у любых двух девочек $l<k$ Общих знакомых мальчиков. Докажите, что у любых двух мальчиков ровно l общих знакомых девочек, а у любой девочки k знакомых мальчиков.

б) В школе поровну мальчиков и девочек. Известно, что у любого мальчика k знакомых девочек, а у любых двух мальчиков $l<k$ Общих знакомых девочек. Докажите, что у любых двух девочек ровно l общих знакомых мальчиков, а у любой девочки k знакомых мальчиков.

5. Можно ли расположить на плоскости 22 окружности и 22 точки так, чтобы на каждой окружности лежало 7 точек, а через каждую точку проходило 7 окружностей?

Часть 14. Определители, собственные значения, применения в графах.

Определение. Дано векторное пространство V над полем F. Назовём отображение $f\colon V \times V \times V \ldots \times V \to F$ *полилинейным*, если оно линейное по каждому аргументу.

Определение. Полилинейное отображение $f(v_1, v_2, \ldots v_n)$ назовём *кососимметрическим*, если для любых векторов $v_1, v_2, \ldots v_n$ и любых индексов $1 \leqslant i < j \leqslant n$ имеет место равенство

$$f(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots v_n) = -f(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots v_n).$$

14-1. Чему равна *ориентированная площадь* параллелограмма, натянутого на векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

14-2. Докажите, что все кососимметрические полилинейные n-местные функции в n-мерном пространстве пропорциональны.

Определение: *Определителем* матрицы A размера $n \times n$ называется число

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} sgn\ \sigma \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)},$$

где $sgn\ \sigma = -1$, если σ - нечетная перестановка, и $sgn\ \sigma = 1$, если σ - четная перестановка.

14-3. Докажите, что определитель матрицы A размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\overline{v} \neq 0$, что $A\overline{v} = 0$.

14-4. а) Дано n-мерное линейное пространство V и оператор $f\colon V \to V$. Зафиксируем какую-нибудь n-местную кососимметрическую полилинейную функцию D. Докажите, что существует такое число λ, что для любых $\overline{v_1}, \overline{v_2} \ldots \overline{v_n} \in V$ выполнено $D(f(\overline{v_1}), f(\overline{v_2}), \ldots f(\overline{v_n})) = \lambda D(\overline{v_1}, \overline{v_2} \ldots \overline{v_n})$.
б) Докажите, что определитель матрицы оператора f не зависит от базиса, в котором матрица записывается.
в) Докажите, что для любых двух матриц A и B выполнено равенство $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Определение: Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* для линейного оператора $T : V \to V$, если $T(v) = \alpha v$ для некоторого $\alpha \in k$ (которое называется собственным значением T).

Определение: Матрице A размера $n \times n$ можно сопоставить многочлен $\det(A - tId)$ от переменной t степени n. Он называется *характеристическим многочленом* матрицы.

14-5 а) Докажите, что все матрицы линейного оператора независимо от выбора базиса имеют один и тот же характеристический многочлен. Таким образом можно говорить о характеристическом многочлене линейного оператора.

б) Докажите, что собственные значения линейного оператора это в точности корни характеристического многочлена в поле k.

14-6. Назовём *следом* квадратной матрицы сумму элементов на главной диагонали. Докажите, что след матрицы данного оператора не зависит от базиса, в котором матрица записана.

$A(G)$ — матрица смежности графа G на n вершинах.

Теорема: В $\mathbb{R}^n$ есть базис из собственных векторов этой матрицы (с собственными значениями $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$).

14-7. а) Петя написал матрицу самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе. Что можно сказать про эту матрицу?
б) рассмотрим собственный вектор $v \in \mathbb{R}^n$ самосопряжённого оператора f. Докажите, что ортогональное дополнение к $< v >$ (пространству векторов, коллинеарных v) является инвариантным подпространством оператора f.
в) Поймите, что если мы вдруг докажем, что у самосопряжённого оператора всегда есть собственный вектор, то мы придумаем доказательство теоремы 1 по индукции по размерности пространства. г)Предположим, что комплексное, но невещественное число $z = x + iy$ является собственным значением некоторого оператора $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Докажите, что существуют два таких вектора u, v, что $f(u) = xu + yv$, $f(v) = -yu + xv$.
д) Докажите, что у самосопряжённого оператора так не бывает.

Определение. Назовём граф *сильно регулярным степени* k, если у него степень каждой вершины равна k, у любых двух смежных вершин нет общего соседа, а у любых двух несмежных вершин ровно один общий сосед.

14-8. а) Сколько вершин у сильно регулярного графа степени k?
б) Пусть A матрица смежности сильно регулярного графа степени k. Составьте равенство, в котором в одной части нечто от матрицы A, а в другой — фиксированная матрица достаточно хорошего вида (назовём её пока что K).
в) Докажите, что если в некотором другом базисе A диагональна, то K — тоже. Что в этом базисе будет у неё на диагонали?
г) **(Теорема Хоффмана-Синглтона)** Докажите, что равенство из пункта б) возможно только если $k = 2, 3, 7, 57$.

14-9. В стране некоторые города соединены авиалиниями. Оказалось, что у любых двух городов есть ровно один город, соединённый с обоими. Докажите, что есть город, соединённый авиалиниями со всеми остальными.

14-10.Можно ли расположить на плоскости 22 окружности и 22 точки так, чтобы на каждой окружности лежало 7 точек, а через каждую точку проходило 7 окружностей?