Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 17. Домашнее задание на каникулы. 25.12. 2014

127. Существует ли граф, у которого 10 вершин, степень каждой вершины равна 3, а между любыми двумя вершинами есть путь длины не более 2?

128. На плоскости Нарисовано 128 кругов. Назовём пару кругов *близкой*, если можно выбрать по точке внутри каждого круга так, чтобы отрезок, соединяющий их, не пересекал остальных кругов. Какое наименьшее количество близких пар может быть?

129. На плоскости нарисовано несколько отрезков. Известно, что из любой точки любого отрезка можно добраться до любой другой точки любого отрезка, двигаясь лишь по отрезкам. Докажите, что можно один из отрезков стереть, чтобы это условие сохранилось.

130. Для положительных a, b, cd докажите, что

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

131. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что у Васи есть способ поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

132. В прямоугольной таблице расставлены действительные, но нецелые числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Всегда ли можно округлить каждое число (то есть заменить на одно из двух ближайших целых чисел) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце не изменилась.

133. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\frac{4a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 2$. (Сравните с задачей 60.)

134. Фокусник выкладывает 36 карт в виде квадрата 6×6 (в 6 столбцов по 6 карт) и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

135. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая l_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая l_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые l_1 и l_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных l_1 и l_2.

136. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

137. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

138. Целые числа a и b таковы, что для любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ — квадрат натурального числа. Докажите, что $ab = 0$.

139. На полке стоит n книг. Сколькими способами можно выбрать k из них так, чтобы никакие две выбранные книги не стояли рядом?

140. За круглым столом короля Артура сидят n рыцарей. Сколькими способами можно выбрать k из них так, чтобы никакие два выбранных рыцаря не сидели рядом?

141. В наборе "Юный геометр" 6 палочек. И Петя, и Вася сложили из этих палочек выпуклый четырёхугольник с проведёнными диагоналями. Могли ли у них получится разные четырёхугольники?

142. Пусть $P(x)$ — многочлен степени а) 3; б) 4 со старшим коэффициентом 1. Может ли уравнение $P(n) = c$ иметь 3 (4 для пункта б) целых решения для двух разных целых c?

143. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC , N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

144. Обозначим основания высот неравнобедренного треугольника ABC, проведённых из точек A, B и C, через A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке Q. Докажите, что PQ перпендикулярно OM, где O и M — центр описанной окружности и точка пересечения медиан треугольника ABC соответственно.

С наступающим Новым Годом!
Желаем успехов в 2015 году!