Кружок в Хамовниках. 9 класс

Серия 16. Радикальные оси. 18.12. 2014

118. а) Докажите, что если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, то существует единственная точка плоскости, имеющая одинаковую степень точки относительно всех трёх окружностей. Эта точка называется **радикальным центром** этих трёх окружностей. б) Проведено три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что их общие хорды (или прямые, их содержащие) пересекаются в одной точке.

119. а) Докажите, что середины 4-х общих касательных к двум непересекающимся кругам коллинеарны. б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

120. Точки A_1 и A_2 лежат на стороне BC, B_1 и B_2 — на стороне AC, C_1 и C_2 — на стороне AB. Известно, что точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат на одной окружности; B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности; C_1, C_2, A_1, A_2 лежат на одной окружности. Докажите, что все 6 точек лежат на одной окружности.

121. На сторонах AC, AB треугольника ABC отмечены точки B_1, C_1 соответственно. На отрезках BB_1, CC_1 как на диаметрах построили окружности. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей, содержит ортоцентр треугольника.

122. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Перпендикуляр, восстановленный в точке I к отрезку AI, пересекает прямую BC в точке P. Q — основание перпендикуляра, опущенного из I на AP. Докажите, что Q лежит на описанной окружности треугольника ABC.

123. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

124. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки и касающуюся данной прямой.

125. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На отрезке CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности, и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.

126. В обозначениях предыдущей задачи добавим точку P пересечения касательных, проведённых к окружности в точках A и B. Докажите, что $\angle CPM = \angle DPM$.