МТФ.
8-9 класс.

2 марта 2015 г.

1. Найдите остаток от деления 14^{2015} на 13.
2. Найдите остаток от деления 36^{2015} на 37.
3. Докажите, что число $7^{2012} + 9^{2015}$ делится на 10.
4. Найдите остаток при делении $9^{121} + 13^{121}$ на 11.
5. Докажите, что число $2006 \cdot 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 - 24$ делится
a) на 2005;
b) на 2010.
6. Докажите, что
a) $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod 5$;
b) $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{13}$;
7. Докажите, что число $(3^n - 1)^n - 4$ делится на $3^n - 4$ при любом натуральном n.
8. Докажите, что для любых целых a и b
a) $a^n - b^n$ делится на $a - b$ при любом натуральном n;
b) $a^n + b^n$ делится на $a + b$ при любом нечётном натуральном n.
9. Найдите все k, для которых $2^k - 1$ делится на 7;
10. Докажите, что число $n^2 - 1$ делится на 3 при любом натуральном n, если $(n, 3) = 1$.
11. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 3 при любом натуральном n, если $(n, 3) = 1$.
12. При каких условиях на k и m обе части сравнения $ka \equiv kb \pmod m$ можно сократить на k, получив $a \equiv b \pmod m$.
13. Пусть a — целое число, которое не делится на простое число p. Докажите, что:
a) числа a, $2a$, $3a$, $\ldots$, $(p-1)a$ дают различные остатки по модулю p.
b) $a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a \equiv (p-1)! \pmod p$
c) **(Малая теорема Ферма)** Докажите, что если p – простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.
14. Докажите, что $11^{103} - 11$ делится на 103.
15. Найдите остаток от деления: 2^{100} на 101.
16. Найдите остаток от деления: 7^{102} на 101.
17. Найдите остаток от деления: 8^{900} на 29.
18. Докажите, что $n^7 - n$ делится на 42 при любом n.
19. Докажите, что $16^{2n+1} + (2n+1)^{16}$ делится на 17, если $2n + 1$ не делится на 17.
20. Докажите, что число $30^{123} + 123^{30}$ делится на 31.
21. Сформулируйте и докажите признак делимости на 9.