Сравнение по модулю.
8-9 класс.

9 февраля 2015 г.

Определение. Числа, дающие одинаковые остатки при делении на m, называются **сравнимыми по модулю** m.

Обозначается $a \equiv b \pmod{m}$.

Упражнение. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

Свойства сравнений.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, k – произвольное целое число. Тогда:
a) $ka \equiv kb \pmod{m}$;
b) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;
c) $ac \equiv bd \pmod{m}$;
d) $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

1. Какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 3? На 4? На 5?

2. а) Докажите, что из восьми целых чисел всегда можно выбрать два, разность которых делится на 7.
б) Докажите, что из пяти чисел всегда можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 7.

3. Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 даёт остаток 1.

4. Докажите, что число $a^2 + 1$ не делится на 3 для любого целого a.

5. Докажите, что число $n^3 + 5n$ делится на 3 для любого натурального n.

6. Докажите, что если для целых чисел x, y, z верно $x^2 + y^2 = z^2$, то хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

7. Может ли сумма квадратов двух целых чисел, не кратных 3, быть квадратом некоторого целого числа?

8. Докажите, что если число $a^2 + b^2$ делится на 7, то целые числа a и b делятся на 7.