

Диагностическая работа

Задача 1. Прямоугольник 100×1000 разрезан на доминошки. Докажите, что найдётся другое такое разрезание этого прямоугольника на доминошки, что у этих двух разрезаний нет общих доминошек.

Решение. Разобьём прямоугольник 100×1000 на квадраты 2×2 . Внутри каждого такого квадрата исходное замощение не может содержать одновременно горизонтальное и вертикальное домино, так как в квадрате 2×2 любое горизонтальное домино пересекается с любым вертикальным домино. Следовательно, можно построить замощение, в котором каждый квадрат 2×2 замощён двумя домино, причём ни одно из них не входит в исходное замощение, что и требовалось. $\square$

Задача 2. Даны положительные числа a, b, c , для которых $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geq 3.$$

Решение. По неравенству о средних $1 = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, откуда следует, что $abc \leq 1$. Тогда по неравенству о средних

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geq 3.$$

 $\square$

Критерии

1 б. Получено неравенство $abc \leq 1$.

Задача 3. Пусть в треугольнике ABC точка D — основание биссектрисы из угла A . Точки E и F — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на BC . Чему может равняться угол BAC ?

Ответ: 120° .

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AEF , а $\angle BAC = \alpha$. Поскольку углы BAD и CAD острые, точки E и F лежат в полуплоскости относительно прямой BC , содержащей точку A . По теореме о вписанном угле получаем

$$\angle BED = 2\angle BAD = \alpha = 2\angle DAC = \angle DFC.$$

Таким образом, равнобедренные треугольники BED и DFC подобны. Отсюда следует, что $\angle EDF = \alpha$, а прямая BC является внешней биссектрисой угла при вершине D треугольника DEF .

Точка O лежит на прямой BC и на серединном перпендикуляре к отрезку EF . Рассматривая эту конфигурацию относительно треугольника DEF , видим, что точка O лежит

получаем

$$\begin{aligned} k &\leq \sum_{i=1}^{1075} \min\{i-1, 1075-i\} = \\ &= 0 + 1 + \dots + 536 + 537 + 536 + \dots + 1 + 0 = \\ &= 2(1 + 2 + \dots + 536) + 537 = \\ &= 536 \cdot 537 + 537 = \\ &= 537^2 = 288369. \end{aligned}$$

Пример. Возьмём $M = \{1, 2, \dots, 1075\}$. Среднее арифметическое двух различных элементов этого множества лежит в M тогда и только тогда, когда эти элементы имеют одинаковую чётность. В M содержатся 538 нечётных и 537 чётных чисел, поэтому количество подходящих неупорядоченных пар равно

$$\binom{538}{2} + \binom{537}{2} = \frac{538 \cdot 537}{2} + \frac{537 \cdot 536}{2} = 537^2 = 288369.$$

Следовательно, полученная оценка достигается. □

Критерии

5 б. Оценка.

2 б. Обоснованный пример.

1 б. Необоснованный пример.

Задача 5. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Ответ: да, конечно.

Решение. Докажем более сильное утверждение: для любых целых $m, n \geq 0$ уравнение $a_1! + \dots + a_m! = 2^b - n$ имеет лишь конечное число решений $(a_1, \dots, a_m, b)$ в целых числах, удовлетворяющих условию $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m$.

Проведём индукцию по m . При $m = 0$ уравнение принимает вид $2^b = n$, поэтому для каждого n существует не более одного решения.

Пусть утверждение доказано для $m - 1$; докажем его для m . При фиксированном n покажем, что число возможных значений a_1 конечно.

Если $n = 0$, то $a_1 \leq 2$: в противном случае все факториалы в левой части делились бы на 3, а степень двойки на 3 не делится.

Пусть теперь $n > 0$. Поскольку левая часть положительна, имеем $2^b > n$, откуда $b > v_2(n)$, где v_2 обозначает степень вхождения двойки в число n . Поэтому

$$v_2(n) = v_2(2^b - n) = v_2(a_1! + \dots + a_m!) \geq v_2(a_1!).$$

Но $v_2(a_1!) \rightarrow \infty$ при $a_1 \rightarrow \infty$, так что возможных значений a_1 лишь конечное число.

Для каждого из этих значений уравнение переписывается в виде $a_2! + \dots + a_m! = 2^b - (n + a_1!)$. По предположению индукции оно имеет лишь конечное число решений. Поскольку и возможных значений a_1 конечное число, индукционный переход доказан.

Теперь для каждого $m \leq 10^{10}$ уравнение $a_1! + \dots + a_m! = 2^b$ имеет лишь конечное число решений. Значений m тоже конечное число, поэтому множество компактных степеней двойки конечно. $\square$

Задача 6. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, AD — высота. Прямые BC и AO пересекаются в точке E . Прямая, проходящая через E перпендикулярно AO , пересекает прямые AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая AD повторно пересекает описанную окружность треугольника AKL в точке X . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC , AKL и DEX , имеют общую точку.

Решение. Будем обозначать описанную окружность треугольника XYZ через (XYZ) . Пусть прямая AO повторно пересекает окружность (ABC) в точке Y . Так как $\angle AKE = \angle ACB$, четырёхугольник $KBLC$ вписанный. По теореме о степени точки E получаем $AE \cdot EY = BE \cdot EC = KE \cdot EL$. Следовательно, четырёхугольник $ALYK$ также вписанный.

Далее, $\angle AXK = \angle ALK = \angle ABC$, поэтому четырёхугольник $BDXK$ вписанный. Аналогично, $\angle AYK = \angle ALK = \angle ABC$, поэтому четырёхугольник $BEYK$ вписанный.

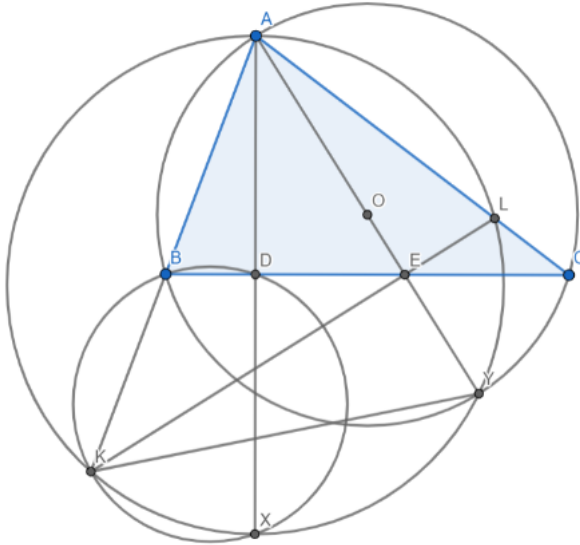


Рис. 2: к задаче 6.

Применяя теорему о степени точки A к двум последним окружностям, получаем

$$AE \cdot AY = AB \cdot AK = AD \cdot AX.$$

Следовательно, точки D, E, Y, X лежат на одной окружности. Таким образом, окружности (ABC) , (AKL) и (DEX) имеют общую точку Y . $\square$