Увидеть граф

1. К 3000 году поверхность Марса разделили на регионы, каждый из которых принадлежит какой-то из 100 стран (регионы, принадлежащие одной стране, могут образовывать несвязную область). Назовем страны *соседними*, если им принадлежат два региона на Марсе, имеющие общую границу. Найдите наименьшее возможное число пар соседних стран.

2. Муравей ползает по поверхности кубика $11 \times 11 \times 11$ вдоль диагоналей квадратиков 1×1 (поворачивать в центре клетки нельзя). Могло ли так оказаться, что он побывал в центре каждого квадратика ровно один раз?

3. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.

(а) Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 26 целых. Докажите, что хотя бы одно из чисел $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ — целое.

(б) Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 37 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ — целые.

4. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе — плохим. Каких лабиринтов больше — хороших или плохих?

5. На шахматной доске стоит несколько ладей так, что в каждой строке и каждом столбце стоит хотя бы k ладей. При каком наименьшем k гарантированно можно выбрать 8 ладей так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояло по выбранной ладье?

6. Поле игры “Сапёр” — доска $n \times n$, некоторые клетки которой заняты минами. На клетках с минами ничего не написано, в каждой клетке без мин написано число клеток с минами, соседних с ней по стороне или углу. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, написанных на доске игры “Сапёр”?

7. Для множества S верно, что для любого $k = 2, 3, \dots, n$ существуют $x, y \in S$ такие, что $x - y = F_k$, где F_k — k-ое число Фибоначчи. Какое наименьшее возможное число элементов может быть в S?