Упорядоченные числовые наборы

1. $a_1, a_2, \ldots, a_8$ — перестановка чисел 1, 2, …, 8. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_8$?

2. На доске написаны четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных.

3. Пусть $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k = n$ — все делители натурального числа n. Оказалось, что $n = a_3^3 - a_2^3$. Чему может быть равно n?

4. Дана бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots$, в которой все элементы попарно различны. Оказалось, что для любого n элемент a_n содержится в некотором монотонном отрезке длины $n+1$. Докажите, что исходная последовательность, начиная с некоторого элемента, монотонна. (Монотонный отрезок — несколько подряд идущих элементов таких, что или каждый следующий больше предыдущего, или каждый следующий меньше предыдущего.)

5. Даны натуральные числа m и n, большие 1. Докажите, что существуют натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ такие, что при любых i и j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$, число a_j кратно $n(a_j - a_i)$.

6. Последовательность $1 = x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$ положительных чисел удовлетворяет следующему условию: для всякого натурального n найдутся натуральные p, q такие, что $p \leqslant n \leqslant q$ и
$$x_{p+1} + \ldots + x_{q+1} \leqslant 0,99\left(x_p + \ldots + x_q\right).$$
Докажите, что $x_1 + \ldots + x_n < 200$ при всех n.