# Геометрический взгляд на многочлены и функции

1. График $y = x^2 + ax + b$ пересекает оси координат в трех разных точках $A, B, C$. Центр описанной окружности треугольника $ABC$ лежит на прямой $y = x$. Докажите, что $a + b + 1 = 0$.

2. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график ещё какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

3. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение $a_1(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + a_2(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + \ldots + a_n(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}) = 0$ имеет хотя бы один корень.

4. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

5. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots$ такова, что при всех натуральных $n > 2024$ число $a_{n+1}$ является наименьшим корнем многочлена $P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n$. Докажите, что существует такое $N$, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего.

6. Можно ли замостить плоскость параболами, среди которых нет равных? (Требуется, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одной параболе и чтобы ни одна парабола не переводилась ни в какую другую параболу движением.)

7. Даны квадратные трехчлены $f(x)$, $h(x)$ с единичными старшими коэффициентами и некоторый многочлен $g(x)$ ненулевой степени. Известно, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех $x$. Докажите, что если графики $f(x)$ и $h(x)$ имеют общую точку, то они совпадают.