

Я знаю, что ты знаешь, что я знаю

1. Петя и Вася загадали по натуральному числу и сказали их Коле. Коля написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом их произведение. После этого он один из листов съел, а другой — на нём оказалось написано число 2024 — показал Пете и Васе. Увидев это число, Петя сказал, что не знает, какое число загадал Вася. Услышав это, Вася сказал, что не знает, какое число загадал Петя. Какое число загадал Вася?
2. Лев — очень мудрое животное, которое всегда действует рационально. На волшебный остров поселили n львов и одну козу. Львы могут питаться растущими на острове плодами, но коза для льва вкуснее. Однако остров волшебный, и съевший козу лев сам мгновенно превращается в козу. Ни один из львов не хочет быть съеденным (после того, как станет козой) другим львом, и другие львы об этом знают. При каких n коза будет съедена?
3. Царь посадил в темницу 100 мудрецов, каждого в свою камеру. В камере у каждого мудреца есть либо *волшебное* зелье, либо *проклятое* зелье, которые не отличаются на внешний вид. Если все *волшебные* зелья будут выпиты, то царь отпустит всех мудрецов на свободу. Если же какой-то мудрец выпьет *проклятое* зелье, то он превратится в лягушку. Каждый мудрец знает, какое именно зелье у каждого из остальных мудрецов, но про своё ничего не знает. Каждое утро слуга проверяет все камеры на предмет того, выпиты ли уже все *волшебные* зелья. Докажите, что через какое-то время всех мудрецов освободят, причём никто из них не превратится в лягушку.
4. В магазине есть 3 компьютера: хороший, который всегда отвечает правду, плохой, который всегда врёт, и злой, который отвечает что попало. Перед покупкой разрешается задать один вопрос любому одному компьютеру. Можно ли задать такой вопрос, чтобы обязательно купить: (а) не плохой; (б) не злой компьютер?
5. Император пригласил на праздник N волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдаёт каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнаёт, добрый ли он был или злой. После этого император вновь выдаёт каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.
6. В городе живут n волшебников из предыдущей задачи ($n > 1$), добрых больше, чем злых. Можно задавать любым горожанам вопросы типа «кем является такой-то» (в частности, можно спросить человека, кем является он сам). Другие вопросы задавать нельзя. Можно ли узнать тип всех горожан за
(а) $2n - 2$ вопроса; (б) $2n - 3$ вопроса; (в) за меньшее число вопросов?