Считаем в синусах

Теорема Чевы в тригонометрической форме: Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle(AB, AA_1)}{\sin\angle(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin\angle(CA, CC_1)}{\sin\angle(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin\angle(BC, BB_1)}{\sin\angle(BB_1, BA)} = 1$$

Очень важная мысль: Отношение синусов задаёт луч!

Пример: Докажите, касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются на симедиане из вершины A.

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

2. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCD, CAE, ABF так, что $\angle BCD = \angle ECA = \varphi, \angle CAE = \angle BAF = \theta, \angle CBD = \angle ABF = \psi$. Докажите, что прямые AD, BE, CF конкурентны.

3. В треугольнике ABC через внутреннюю точку X проведены чевианы AD, BE, CF. В сегмент, отсекаемый прямой AC от описанной окружности ω треугольника ABC (не содержащий точку B), вписана окружность, касающаяся AC в точке E и ω в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 конкурентны.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle CID$.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0, на отрезке AA_0 выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B_0, а прямая CX пересекает AB в точке C_0. Отрезки A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P, а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_2, и продолжении сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 соответственно. На отрезках A_1C_1 и A_2C_2 отмечены точки X и Y соответственно, такие что $XB_1 \perp AC$ и $YB_2 \perp AC$. Докажите, что $AXCY$ — параллелограмм.

7. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, конкурентны.

8. Смотрите на картинку.