Неравенства в теории чисел

1. Дано простое число p. Все натуральные числа от 1 до p выписаны в ряд в порядке возрастания. Найдите все p, для которых этот ряд можно разбить на несколько блоков подряд идущих чисел так, чтобы суммы чисел во всех блоках были одинаковы.

2. Натуральное число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (в частности, последняя цифра палиндрома совпадает с первой и потому не равна нулю). Квадраты двух различных натуральных чисел имеют по 1001 цифре. Докажите, что строго между этими квадратами на числовой прямой найдется палиндром.

3. На доске написано 100 различных натуральных чисел. К каждому из этих чисел прибавили НОД всех остальных. Могло ли среди 100 чисел, полученных в результате этих действий, оказаться три одинаковых?

4. Назовем тройку натуральных чисел a, b, c вызывающей интерес, если $(a^2+1)(b^2+1)$ кратно c^2+1, но ни один из двух множителей сам не кратен c^2+1. Дана вызывающая интерес тройка a, b, c. Докажите, что существуют натуральные числа u, v, для которых тройка u, v, c вызывает интерес и $uv < c^3$.

5. В клетках таблицы $3 \times n$ записаны натуральные числа. В каждой из трёх строчек встречается по одному разу числа $1, 2, \ldots, n$. Для каждого столбца сумма попарных произведений стоящих в нём трех чисел кратна n. При каких n это возможно?

6. Дано натуральное число N. На доске написаны числа от N^3 до N^3+N. Среди них а чисел покрасили в красный цвет, а какие-то b из остальных — в синий. Оказалось, что, что сумма красных чисел делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b.

7. Даны различные натуральные числа a, b, c. Докажите неравенство:

$$\text{н.о.д.}(ab+1, bc+1, ac+1) \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

8. Найдите все пары простых чисел p и q (не обязательно различных), для которых числа $2p-1$, $2q-1$ и $2pq-1$ являются квадратами натуральных чисел.