Диагностическая работа - Решения

1. Сколькими способами числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ можно расставить в ряд так, чтобы первое число не делилось на 3, сумма первых двух чисел не делилась на 3, ..., сумма первых шести чисел не делилась на 3?

   Ответ: 360. *Решение:* Назовём расстановку из условия *правильной*. Решим аналогичную задачу для чисел $1, 2, 4, 5, 7$. Заметим, что из правильной расстановки этих пяти цифр можно получить правильную расстановку семи цифр добавлением 3 и 6 на произвольные позиции, кроме первой (поскольку они делятся на 3), что может быть сделано $6 \cdot 5 = 30$ способами. Также из правильной расстановки семи цифр получится расстановка пяти цифр после стирания 3 и 6. Из чисел $1, 2, 4, 5, 7$ два дают остаток 2 при делении на 3, а оставшиеся дают остаток 1. Сумма чисел $1, 2, 4, 5, 7$ даёт остаток 1 при делении на 3, поэтому при их правильной расстановке последним не может стоять число, дающее остаток 1, иначе сумма первых четырёх делится на 3. Также среди первых трёх есть хотя бы одно, дающее остаток 2, иначе их сумма делится на 3. Среди же первых двух цифр не может быть числа, дающего остаток 2, поскольку тогда второе число даёт остаток 1. Тогда числа, дающие остаток 2, стоят на третьей и пятой позициях, то есть остатки наших чисел расставляются правильно единственным образом. Для перехода от остатков к числам нужно умножить на количество перестановок чисел, сравнимых по модулю 3 между собой, то есть на $3! \cdot 2! = 12$. Таким образом, получаем ответ $12\ cdot 30 = 360$.

2. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 240. Точки E и H — середины отрезков AD и AB соответственно. Точка G, лежащая на BC, точка F, лежащая на CD, и точка K, лежащая на AC, таковы, что $BG = 2GC$, $DF = 3FC$, а площадь треугольника EKF равна 33. Найдите площадь треугольника HKG.

   Ответ: 32.

   Решение: Найдем в каком отношении точка K делит отрезок AC. Пусть $AK/KC = t$. Тогда из свойств площадей получим, что

   $$87/120 = 1 - 33/120 = 1 - S_{KEF}/S_{ACD} = (S_{AKE} + S_{KFC} + S_{EFD})/S_{ACD} =$$
   $$= AK/AC \cdot AE/AD + CK/CA \cdot CF/CD + DE/DA \cdot DF/DC = \frac{t}{2(t+1)} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{3}{8}.$$

   Решая линейное уравнение, получим $t = \dfrac{2}{3}$. Тогда $S_{HKG} = S_{ABC}(1 - (S_{AHK} + S_{BHG} + S_{GCK})/S_{ABC}) = S_{ABC} \cdot (AH/AB \cdot AK/AC + BH/BA \cdot BG/BC + CG/CB \cdot CK/CA) = 120 \cdot (1 - (\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5})) = 32$

3. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7\lfloor x \rfloor + 5 = 0$.
   ($\lfloor x \rfloor$ - наибольшее целое число, не превосходящее x.)

   Ответ: 92.

   Решение: При $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 7$ уравнение не имеет корней, поскольку левая его часть будет положительной. Заметим, что для каждого целого t от 1 до 6 наше уравнение имеет не большее одного корня при условии $t \leqslant x < t+1$, и если корень существует, то он вычисляется по формуле $\sqrt{7t-5}$. Проведя подставляя в эту формулу все $0 \leqslant t \leqslant 6$, получим, что корнями нашего уравнения являются $\sqrt{2}, \sqrt{23}, \sqrt{30}.\sqrt{37}$ ($\sqrt{9}$ и $\sqrt{16}$ решениями не будут, поскольку их целые части больше, чем 2 и 3 соответственно).

4. На координатной плоскости Oxy отмечены точки $A_1\,(40,1), A_2\,(40,2)\,, \ldots, A_{40}\,(40,40)$ и проведены отрезки $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{40}$. Будем называть точку с целыми координатами *хорошей*, если она лежит внутри одного из проведенных отрезков $OA_i, i = 1, 2, 3, \ldots, 40$. Найдите число хороших точек.

Ответ: 140.

Решение: Заметим, что **внутри** отрезка между точками $(0,0)$ и (a,b) в точности НОД$(a,b)-1$ точек. Среди чисел 1 до a количество чисел b таких, что $(a,b)=d$ равняется $\varphi(\frac{a}{d})$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Тогда ответ равен $(2-1)\varphi(20)+(4-1)\varphi(10)+(5-1)\varphi(8)+(8-1)\varphi(5)+$ $+(10-1)\varphi(4)+(20-1)\varphi(2)+(40-1)\varphi(1) = 8+12+16+28+18+19+39 = 140$.

5. Окружность ω_1 с центром O_1 и окружность ω_2 с центром O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая O_1B пересекает ω_2 вторично в точке C, а прямая O_2B пересекает ω_1 вторично в точке D. Известно, что $\angle O_1BA = 3\angle BDC$, а $\angle BCD = 17,5^\circ$. Прямая, проходящая через точку B параллельно DC вторично пересекает ω_1 в точке Q. Найдите угол QDA. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 85.

Решение: Пусть O_1B и O_2B вторично пересекают ω_1 и ω_2 в точках P и R соответственно. $\angle PDB = \angle PAB = \angle RAB = \angle RCB$, поскольку PB и RB — диаметры ω_1 и ω_2 соответственно, отсюда четырёхугольник $PDCR$ — вписанный, а точку P, A и R лежат на одной прямой. Тогда в силу параллельности и свойств вписанных четырёхугольников имеем, что $\angle QBD = \angle BDC = \angle RPB = \angle AQB$, откуда $DB||AQ$. Заметим, что $90^\circ = \angle PQB = \angle PBA + \angle AQB = 4\angle DBC$, откуда $\angle DBC = 22,5^\circ$. $\angle QDA = \angle QDB - \angle QBD = 90^\circ + \angle QDP - 22,5^\circ = 67,5^\circ + \angle QBP = 67,5^\circ + \angle DCB = 85^\circ$.

6. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ рассмотрим $f(n)$ — наибольшее из всех возможных произведений натурального числа d $(1 < d < n)$ и остатка r от деления n на d (например, $f(6) = 8$). Найдите ближайшие (меньшее и большее) к 2021 натуральные числа k такие, что уравнения $f(n) = k$ имеют решение.

Ответ: 4004.

Решение: Для нечётного $n = 2k+1$ докажем, что $f(n) = k(k+1)$. Данное значение достигается при $d = k+1$. Если взять $d < k+1$, то соответствующее $r < d \leqslant k$, тогда $rd < k(k+1)$. Если же взять $d = k+1+t$ $(t > 0)$, то $r \cdot d = (k+t+1)(k-t) = k^2 - t^2 + k - t < k(k+1)$. Для чётного $n = 2k$ докажем, что $f(n) = (k-1)(k+1)$. Если взять $d = k+1$, то получим данное значение. Если взять $d < k+1$, то $r < d \leqslant k$, то есть $r \leqslant k-1$. Если же взять $d = k+1+t$ $(t > 0)$, то $r \cdot d = (k+t+1)(k-t-1) = k^2 - (t+1)^2 < (k+1)(k-1)$. Получается, что область значений $f(n)$ — в точности числа вида $n(n+1)$ и $(n+1)(n-1)$ для $n \geqslant 0$. Прямым вычислением находим $44 \cdot 45 = 1980, 45 \cdot 46 = 2070, 43 \cdot 45 = 1935, 44 \cdot 46 = 2024$. Отсюда ответ $1980 + 2024 = 4004$.

7. Рассматриваются все возможные натуральные числа a и b такие, что

$$2019^2 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2020^2.$$

Сколько возможных значений может принимать произведение ab?

Ответ: 4.

Решение: Пусть $ab = a'b'$ для a, b, a', b' из отрезка $[2019^2, 2020^2]$. Заметим, что чисел в этом отрезке $2019 \cdot 2 + 1$. Не умаляя общности, можем считать, что $a < a' \leqslant b' < b$. Из свойства НОД и неравенства о средних получим

$$b-a = b-b'+b'-a \geqslant \text{НОД}(b,b')+\text{НОД}(a,b') \geqslant 2\sqrt{\text{НОД}(b,b')\text{НОД}(a,b')} \geqslant 2\sqrt{\text{НОД}(ab,b')} \geqslant$$
$$\geqslant 2 \cdot \sqrt{b'} > 2 \cdot 2019.$$

Отсюда $b - a \geqslant 2019 \cdot 2 + 1$, то есть $a = 2019^2$, $b = 2020^2$. Аналогично,

$$a' - a + b' - a \geqslant \text{НОД}(a,a') + \text{НОД}(a,b') \geqslant 2\sqrt{\text{НОД}(a,a'b')} \geqslant 2 \cdot \sqrt{a} = 2 \cdot 2019$$

$$b - a' + b - b' \geqslant \text{НОД}(b,a') + \text{НОД}(b,b') \geqslant 2\sqrt{\text{НОД}(b,a'b')} \geqslant 2 \cdot \sqrt{b} = 2 \cdot 2020.$$

Из того, что $2 \cdot 2020^2 - (a' + b') \geqslant 2 \cdot 2020$ и $(a' + b') - 2 \cdot 2019^2 \geqslant 2 \cdot 2019$, сложив, получим $2020^2 - 2019^2 \geqslant 2019 + 2020$, что бывает верным только если все неравенства обратились в равенства, тогда $a' + b' = 2 \cdot 2019^2 + 2 \cdot 2019 = 2 \cdot 2019 \cdot 2020$. Пусть $a' = (2019 \cdot 2020 - k)$ и $b' = (2019 \cdot 2020 + k)$, тогда

$$2019^2 \cdot 2020^2 = ab = a'b' = (2019 \cdot 2020 - k)(2019 \cdot 2020 + k) = 2019^2 \cdot 2020^2 - k^2.$$

Равество достигается только при $k = 0$. И четвёрка $2019^2, 2019 \cdot 2020, 2019 \cdot 2020, 2020^2$ единственная, для которой произведения в парах равны. Тогда для получения ответа нужно просто посчитать количество пар различных чисел, количество пар, в которых числа одинаковы, и вычесть единицу из-за найденого единственного случая совпадения произведений. $C^2_{2019 \cdot 2+2} + (2019 \cdot 2 + 2) - 1 = 8162819$

8. На тренировку по бадминтону пришли 16 бадминтонистов. За время тренировки первый из них сыграл одну партию, второй — две, третий — три, ..., последний — 16 партий. (В каждой партии играют двое, партия заканчивается победой одного из них). Оказалось, что любая пара бадминтонистов сыграла либо ноль, либо одну, либо две партии. Какое наименьшее число пар могло сыграть по две партии?

Ответ: 4.

Решение:

Пример: Первый спортсмен сыграл с 16-ым, второй — у 15-ым и 16-ым, третий –– с номерами с 14 по 16, ..., восьмой — с номерами с 9 по 16, т.е. у первых восьми уже нужное количество партий; девятый сыграл с номерами с 10 по 16, десятый — с номерами с 11 по 16, ..., пятнадцатый — с 16-ым, т.е. у каждого из этих восьми сейчас на одну партию меньше, чем требуется. Но пусть ещё 10-й сыграл с 9-ым, 12-й — у 11-ым, 14-й – с 13-ым и 16-ый — с 15-ым, тогда теперь у всех нужное количество партий, и именно в этих четырёх парах бадминтонисты сыграли дважды.

Оценка: Рассмотрим с 9-го по 16-го спортсменов. Максимум $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ партий у них могли состояться с первыми 8-ю, значит, между собой у них состоялось хотя бы $((9 + 10 + \ldots + 16) - 36)/2 = 32$ партии (делим на 2, т.к. каждая игра учитывается для двоих). Но всего существует $8 \cdot 7/2 = 28$ пар из этих 8 самых активных бадминтонистов. Значит, хотя бы $32 - 28 = 4$ раза состоялись повторные партии, т.е. спортсмены выиграли друг у друга.