# Комплексные числа

**Определение.** *Комплексные числа* — это числа вида $z = x + iy$, где $x$ и $y$ — действительные, а $i$ — *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен $-1$. Числа $x, y$ называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью. комплексного числа $z$ и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. *Сопряжённым* числом к $z = x + iy$ называют $\overline{z} = x - iy$. *Модулем* числа $z = x + iy$ называют число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

**1.** Докажите, что
   **(а)** $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$;
   **(б)** $|z|^2 = z\overline{z}$; $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

**2.** Вычислите значение выражения:
   **(а)** $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;
   **(б)** $(1+i)^{4n}$, при всех натуральных $n$.

**3.** Докажите равенство $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

**Тригонометрическая форма.** Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ и $\varphi$ — соответственно модуль и аргумент числа $z$.

**4.** Докажите, что при умножении (делении) двух комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются), а модули перемножаются (делятся). (*Надеюсь вы не прогуливаете уроки тригонометрии в школе.*) Выведите отсюда *формулу Муавра*:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

**5.** Используя *формулу Муавра*, вычислите $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$, при всех целых $n$.

**6.** Вычислите суммы:
   **(а)** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$;
   **(б)** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$.

**7.** Комплексные числа $a, b, c$ имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}\right|$.

**8.** Даны комплексные числа $a, b, c$. Докажите, что $\operatorname{Re}(a-c)(\overline{c}-\overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $|c - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a-b|$.

**9.** Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости в вершинах выпуклого $n$-угольника. Точка $z$ такова, что

$$\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0.$$

Докажите, что точка $z$ лежит внутри этого $n$-угольника.