Побитовая сумма и код Хемминга

Для двух строк $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ длины n из нулей или единиц определим их *побитовую сумму*

$$A \oplus B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

где в каждом разряде выполнено сложение по модулю 2.

Для двух целых неотрицательных чисел a и b их *побитовой суммой* $a \oplus b$ назовём целое неотрицательное число, двоичная запись которого является побитовой суммой двоичных записей чисел a и b (для равенства длин строк можно в одну из записей добавить ведущие нули).

Например, $13 \oplus 27 = 01101_2 \oplus 11011_2 = 10110_2 = 22$.

Конструкция (**Код Хемминга**) Назовём 1-*сферой* (1-*шаром*) множество вершин n-мерного бинарного куба, отличающихся от данной ровно в 1 (не более чем в 1) разряде.
(а) Докажите, что если n — степень двойки, то множество вершин n-мерного бинарного куба можно разбить на 1-сферы.
(б) Докажите, что если $(n + 1)$ — степень двойки, то множество вершин n-мерного бинарного куба можно разбить на 1-шары.
Какие именно вершины следует взять в качестве центров сфер/шаров?

Побитовая сумма

1. Даны натуральные числа $k < n$. Есть три строки длины n из 0 или 1, причём любые две из них отличаются хотя бы в k разрядах. Докажите, что к ним можно добавить четвёртую строку так, чтобы она отличалась от остальных трёх хотя бы в k разрядах. (*Не копайтесь в случаях, не тыкайте отдельные разряды, используйте* $\oplus$.)

2. **(а)** Даны несколько целых неотрицательных чисел с ненулевой побитовой суммой. Докажите, что одно из них можно уменьшить так, чтобы побитовая сумма стала равной 0.
(б) (*Игра ним*) На столе лежат k куч конфет, в них по N_1, N_2, …, N_k конфет. Двое играют в игру. За один ход разрешается выбрать кучу и взять из неё любое натуральное число конфет. Игроки ходят поочерёдно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких наборов $(N_1, N_2, \dots, N_k)$ у второго игрока есть выигрышная стратегия?

3. (*Уместно вспомнить*) Компания из **(а)** 8; **(б)** 2^k друзей ($k \geqslant 2$) — завсегдатаи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру они выставляют команду из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?

Код Хемминга

4. Петя загадал натуральное число от 1 до 2048. Можно задать Пете любой вопрос про число с форматом ответа «да/нет», и Петя ответит. Известно, что Петя соврёт не более одного раза. Можно ли узнать наверняка число Пети, если разрешено задать не более **(а)** 16; **(б)** 14; **(в)** 15 вопросов?

5. Каждый из n мудрецов вслепую подбрасывает монетку и лепит её себе на лоб (орёл и решка равновероятны). Мудрецы видят монетки друг друга, но не видят своих. Одновременно каждый из мудрецов в попытке угадать свою монету произносит одно из трёх: «решка», «орёл», «пас». Задача мудрецов в том, чтобы никто из мудрецов не ошибся и не все сказали «пас».
(а) Докажите, что при $n = 3$ мудрецы могут договориться действовать так, чтобы побеждать с вероятностью 3/4. Существует ли стратегия, в которой мудрецы побеждают с большей вероятностью?
(б) Как при $n = 7$ мудрецам договориться, чтобы победить с вероятностью не менее 7/8?

6. Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску 8×8. Зритель может перекрасить некоторые клетки и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски. И должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм, позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.