Диагностическая работа на осенние сборы

1. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

2. Докажите, что уравнение $a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_{2022} \cdot 2022! = 2023!$ имеет хотя бы 2023! различных решений в целых неотрицательных числах.

3. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ и число a. Известно, что числа $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ образуют геометрическую прогрессию с положительным знаменателем именно в таком порядке. Докажите, что она постоянная.

4. Из клетчатого квадрата 1000×1000 вырезали угловую клетку. Четно или нечетно количество способов разрезать образовавшуюся фигуру на уголки из трёх клеток?

5. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках P и Q. Общая касательная этих окружностей (проходящая ближе к точке P) касается Γ_1 и Γ_2 в точках A и B соответственно. Касательная к Γ_1 в точке P повторно пересекает Γ_2 в точке C. R — точка пересечения AP и BC. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR касается прямых BP и BR.

6. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ натуральных чисел такова, что для любого $n > 10000$ число a_n является наименьшим натуральным, не представимым в виде суммы нескольких (возможно, одного) из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Докажите, что с некоторого момента (для всех k, больших некоторого K) выполнено $a_k = 2a_{k-1}$.