Диагностическая работа на осенние сборы. Решения.

1. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

   Решение: Пусть $a_0 < a_1 < \ldots < a_{100}$ — выбранные числа, упорядоченные по возрастанию. Сумма десяти разностей $a_{10}-a_0, a_{20}-a_{10}, \ldots, a_{100}-a_{90}$ равна $a_{100}-a_0 \leqslant 1000$, поэтому одна из этих разностей не превосходит 100. Пусть это разность $a_{10i+10}-a_{10i}$; тогда $0 < a_{10i+1}-a_{10i} < a_{10i+2}-a_{10i} < \ldots < a_{10i+10}-a_{10i} \leqslant 100$.

2. Докажите, что уравнение $a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_{2022} \cdot 2022! = 2023!$ имеет хотя бы 2023! различных решений в целых неотрицательных числах.

   Решение 1: Рассмотрим уравнение $a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! = 2023!$. Рассмотрим пару чисел (a_2, a_3) такую что $1 \leqslant a_2 \leqslant \frac{2023!}{2\cdot 2!}$ и $1 \leqslant a_3 \leqslant \frac{2023!}{2\cdot 3!}$. Ясно, что таких пар $C = \frac{2023!^2}{2^2\cdot 2!\cdot 3!}$. Так как $a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! \leqslant \frac{2023!}{2} + \frac{2023!}{2} = 2023!$, то можно подобрать такое a_1, что $a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! = 2023!$. Так как очевидно, что $C > 2023!$, мы получаем требуемое.

   Решение 2: Докажем по индукции для $k \geqslant 3$, что разбиений числа $(k+1)!$ в сумму слагаемых вида $1!, 2!, \ldots k!$ хотя бы $(k+1)!$.

   База $k = 3$: Разбиений 24 вида $2x + y$ — 12 штук, $6x + y$ — 4 штуки, $6x + 2y$ — 4 варианта, ещё есть варианты $6 + 2 + 1 + 1 + \ldots + 1$ и $6 + 2 + 2 + 1 + \ldots + 1$, итого уже 24 варианта.

   Переход от k к $k+1$. Пусть M — какое-то разбиение числа $k!$. Тогда дополним его до разбиения числа $(k+1)!$ следующими способами

   - $M + 1 + \ldots + 1$
   - $M + k! + 1 + \ldots + 1$
   - $M + 2 \cdot k! + 1 + \ldots + 1$
   - $\ldots$
   - $M + k \cdot k! + 1 + \ldots + 1$

   Так мы превратили одно разбиения числа $k!$ в $k+1$ разбиений числа $(k+1)!$. Не трудно проверить, что все они получатся различными. В таком случае мы получим хотя бы $(k+1)\cdot k! = (k+1)!$ различных разбийений числа $(k+1)!$, что и требовалось.

3. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ и число a. Известно, что числа $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ образуют геометрическую прогрессию с положительным знаменателем именно в таком порядке. Докажите, что она постоянная.

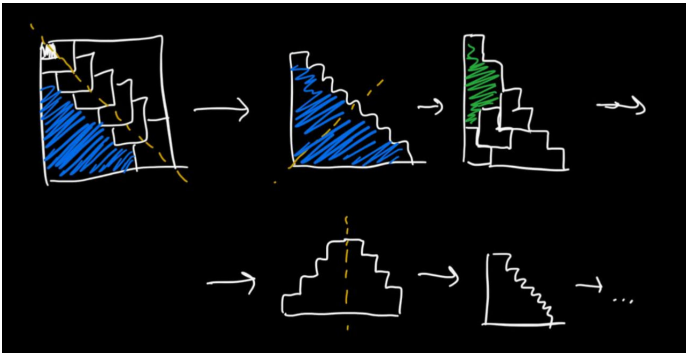
   Решение: Пусть требуемое неверно, тогда числа $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a)))$ попарно различны (так как это геометрическая прогрессия с **положительным знаменате-**

лем). Пусть знаменатель этой прогрессии равен q. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) - qx$. Заметим, что $a, f(a), f(f(a))$ это его корни, но квадратный трёхчлен не может иметь три различных корня. Противоречие, что и требовалось доказать.

4. Из клетчатого квадрата 1000×1000 вырезали угловую клетку. Четно или нечетно количество способов разрезать образовавшуюся фигуру на уголки из трёх клеток?

Ответ: Чётно.

Решение:



Разобьём способы по парам, симметричным относительно главной диагонали, проходящей через вырезанную клетку. В пару к самим себе встанут только симметричные относительно неё разбиения. Легко понять, что в таком случае уголки на главной диагонали расположены как на рисунке. Значит таких способов столько же, сколько способов замостить уголками "лесенку" высоты 998. В ней тоже все разбиения разобьём на пары симметричные относительно диагонали (см. рисунок). Симметричные сами себе разбиения возможны только если уголки на главной диагонали расположены как на рисунке. Тогда нам надо выяснить чётность разбиений зелёной фигурки. Аналогично разбиваем по парам все разбиения на симметричные относительно оси симметрии этой фигуры. Единственные разбиения, которые встают в пару к самим себе, это отражённые разбиения "лесенки" размера 498. Итого мы перешли от "лесенки" размера 998 до "лесенки" размера 498. Продолжая аналогично переходим от лесенки 498 до лесенки 248, а от лесенки 248 до лесенки 123. У 123 уже не существует симметричных разбиений, так как невозможно поместить уголки на оси симметрии этой лесенки. Итого мы получаем, что всего вариантов было чётно.

5. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках P и Q. Общая касательная этих окружностей (проходящая ближе к точке P) касается Γ_1 и Γ_2 в точках A и B соответственно. Касательная к Γ_1 в точке P повторно пересекает Γ_2 в точке C. R — точка пересечения AP и BC. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR касается прямых BP и BR.

Решение: Так как $\angle QAP = \angle QPC$ (свойство касательной) и $\angle QPC = \angle QBC$, то четырёхугольник $ABRQ$ – вписанный. Тогда $\angle BQR = \angle BAR = \angle AQP$ (последнее равенство по свойству касательной). Тогда $\angle BRA = \angle BQA = \angle AQP + \angle PBQ = \angle PBQ + \angle BQR = \angle PQR$, следовательно BR касается описанной окружности PQR. Далее $\angle BPR = \angle BAP + \angle ABP = \angle BQR + \angle PQB = \angle PQR$, следовательно BP также касается описанной окружности PQR.

6. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ натуральных чисел такова, что для любого $n > 10000$ число a_n является наименьшим натуральным, не представимым в виде суммы нескольких (возможно, одного) из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Докажите, что с некоторого момента (для всех k, больших некоторого K) выполнено $a_k = 2a_{k-1}$.

Решение: Для каждого $n > 10000$ рассмотрим множество всех натуральных чисел, не превосходящих $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, и те из них, которые не являются суммами нескольких элементов множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, назовём *дырками*. Если множество дырок непусто, то a_{n+1} — наименьшая из них, в противном случае $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1$. Докажем, что с увеличением n на 1 количество дырок уменьшается хотя бы на 1. Заметим, что если число $t \leqslant S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ является суммой одного или нескольких из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, то число $S - t$ тоже является такой суммой: это сумма всех a_i, не входящих в сумму, равную t.

То, что a_{n+1} — наименьшая дырка, означает, что все числа от 1 до a_{n+1} являются суммами нескольких из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Поэтому все числа от $a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{n+1}$ до $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ тоже являются такими суммами. Добавляя a_{n+1} получаем, что все числа от $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ до $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$ являются суммами каких-то из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$. Таким образом, при замене n на $n + 1$ новых дырок не появилось, а хотя бы одна старая (собственно a_{n+1}) пропала, что и требовалось доказать. Следовательно, начиная с какого-то момента дырок не останется. Итак, при всех достаточно больших n выполнено равенство $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1$. Тогда $a_{n+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + 1 = 2a_{n+1}$, что и требовалось доказать.