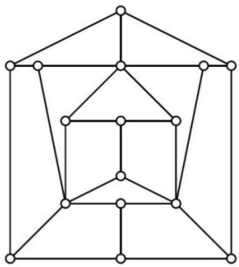
Гамильтоновы циклы и пути

Определение. Гамильтонов путь (цикл) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

1. **(а)** Докажите, что в полном ориентированном графе есть гамильтонов путь.
   (б) Докажите, что в полном ориентированном сильно связном (то есть таком, что от любой вершины до любой другой есть орентированный путь) графе есть гамильтонов цикл.
2. Есть ли в данном графе гамильтонов цикл?



3. Докажите, что грани планарного графа, в котором есть гамильтонов цикл, можно покрасить в 4 цвета правильным образом.
4. На какое максимальное число непересекающихся по рёбрам гамильтоновых **(а)** путей **(б)** циклов можно разбить полный граф на n вершинах?
5. **Теорема Дирака. (а)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n}{2}$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл. **(б)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не меньше $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.
6. **Теорема Оре. (а)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше n. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл. **(б)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше $n-1$. Докажите, что в графе есть гамильтонов путь.
7. Дан двудольный граф, по n вершин в каждой доле. Степень каждой вершины строго больше, чем $\frac{n}{2}$. Докажите, что в графе существует гамильтонов цикл.
8. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?
9. Рассмотрим граф *де Брёйна*: вершинами данного графа являются последовательности из нулей и единиц длины n, а ориентированные рёбра ведут из последовательности $a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ в последовательность $a_1a_2 \ldots a_n$. Докажите, что для любого n в графе де Брёйна есть гамильтонов цикл.