Метод Штурма

1. **а)** Докажите для неотрицательных чисел **неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим**:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

б) Докажите для положительных чисел **неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим**:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

2. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+5y}+\sqrt{1+5z}$, если сумма положительных чисел x, y, z равна 1.

3. Докажите, что если сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна 1, то
а) $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant (n+1)^n$;
б) $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(1+\frac{1}{a_2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant n(n+1)^2$.

4. **а)** $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

б) Докажите, что при $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$ выполняется неравенство с противоположным знаком.

5. Докажите, что если сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна 1, то

$$(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n) \leqslant 2n!\,.$$

6. Неотрицательные числа x_1, x_2, …, x_n таковы, что $x_1+\ldots+x_n=\frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

7. Для неотрицательных a, b, c верно, что $a+b+c=3$. Докажите, что

$$a^2b+b^2c+c^2a \leqslant 4$$