

Сломанные весы

Как обычно, у нас имеется множество из нескольких одинаковых на вид монет, одна из которых фальшивая — она немного легче, чем настоящая. Также, у нас имеется несколько весов — устройств, которые могут сравнивать вес двух наборов монет. Однако некоторые весы сломанные — вместо правильного ответа они выдают случайный. Нам неизвестно, какие именно весы сломаны, но известно, сколько их.

- (а) Покажите, как тремя весами, из которых одни сломаны, найти фальшивую монету из 3 монет за 3 взвешивания.

(б) Покажите, как тремя весами, из которых одни сломаны, найти фальшивую монету из 9 монет за 4 взвешивания.
- Какое минимальное число весов нужно, чтобы вообще найти фальшивую монету, если известно, что сломанных весов ровно k ?
- Докажите, что любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за (а) k ; (б) $k + 1$ взвешивание.
- Докажите, что тремя весами, среди которых одни сломаны, можно найти фальшивую монету
(а) из 3^k монет за $2k + 1$ взвешивание;
(б) из 3^{2k} монет за $3k + 1$ взвешивание.
- Докажите, что если известно, что за d взвешиваний с одними сломанными весами можно найти фальшивую монету из n монет, верна оценка $\frac{3^d}{2d+1} \geq n$.
- (а) Есть 3 весов, одни из которых сломаны, и 81 монета, одна из которых фальшивая. Найдите минимальное число взвешиваний, за которое гарантированно можно найти фальшивую монету.
(б) Есть 4 весов, одни из которых сломаны, и 3^6 монет, одна из которых фальшивая. Докажите, что минимальное число взвешиваний, за которое гарантированно можно найти фальшивую монету, равно 9.
- Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую за (а) 13; (б) 40 взвешиваний 4 весами, одни из которых сломаны?
- Приведите пример такого n и такого d , что за d взвешиваний можно найти фальшивую монету из n монет, имея 4 весов, одни из которых сломаны, но нельзя, имея 3 весов, одни из которых сломаны.