Ранжирование графа

1. В графе любые два простых цикла нечетной длины не имеют общих ребер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

2. В стране **(а)** 90 **(б)** 120 городов, некоторые пары городов соединены дорогой. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 11 городов.

3. *Бинарным* называется дерево, в котором степень каждой вершины не больше трёх. Докажите, что в бинарном дереве на 101 вершине можно удалить вершину таким образом, чтобы в каждой из образующихся компонент связности было менее половины вершин.

4. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

5. Страна состоит из 999 областей — равных равносторонних треугольников таких, что любые две граничащие имеют общую сторону или вершину. Между любыми двумя соседними по стороне областями есть закрытый проезд. Если открыть все проезды, то из каждой области можно будет добраться до любой другой. Президент может выбрать два закрытых проезда из одной области и издать указ, открывающий эти проезды, причем в обе стороны. Докажите, что в любой такой стране президент может добиться того, чтобы из любой области можно было проехать в любую другую.

6. В стране Графинии $n(n \geqslant 2)$ городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $\frac{n}{2} + d$ групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп.

7. В стране $2n$ городов (n – натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$.