Индукция в графах

1. В одной далёкой-далёкой стране некоторые (соседние) города соединены дорогами. Докажите, что президент может в каждый город назначить мэра (рыцаря или лжеца), чтобы на вопрос "есть ли лжецы среди мэров соседних городов" любой мэр отвечал утвердительно.

2. Дан набор из n натуральных чисел. Сумма всех чисел равна $2n-2$. Докажите, что существует дерево, для которого набор степеней вершин совпадает с данным набором.

3. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдётся город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдётся пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

4. В компании из $n > 2$ человек среди любых четырех есть знакомый с тремя остальными. Докажите, что есть человек, который знает всех.

5. **(а)** В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию, можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

   (б) Докажите, что можно выбрать такое разделение и такие маршруты из предыдущего пункта, что либо в Альфии, либо в Бетии найдется циклический маршрут соответствующего республике вида транспорта, проходящий по всем городам ровно по одному разу.

6. В связном графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет, в сумме kn. За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно разложить монеты поровну во все вершины не более чем за $n-1$ ходов.

7. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

8. К 2033 году метро Москвы расширилось до 1000 станций. Известно, что через каждую станцию проходит не более k различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечётной длины. Докажите, что можно так раскрасить станции в $k+2$ цвета так, что соседних одноцветных станций не будет.