

Первый графский разнобой

- (а) Степень любой вершины графа не превосходит d . Докажите, что его можно покрасить в $d + 1$ цвет так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одного цвета.

(б) В ориентированном графе количество исходящих из каждой вершины рёбер не превосходит d . Докажите, что вершины графа можно покрасить в $2d + 1$ цвет так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одного цвета.
- Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку. (а) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета. (б) Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.
- В королевстве между некоторыми городами открыты дороги с двусторонним движением так, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Проезд по дорогам платный, причём стоимость у всех дорог разная. Министр составил список всех возможных маршрутов по дорогам королевства, проходящих через каждый город ровно один раз. Король-реформатор отметил в каждом из этих маршрутов самую дорогую дорогу и приказал закрыть все дороги, которые были отмечены хотя бы один раз. После этого оказалось, что из города А нельзя проехать в город В, из города В — в город С, а из города С — в город А. Докажите, что приказ короля был выполнен неправильно.
- В каждой клетке таблицы $n \times n$ написано одно из чисел 0, 1 или -1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число -1 . Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.
- В компании у каждого сотрудника не менее 50 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка знаковых содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.
- В городе 8 дорог идут с востока на запад и 8 с севера на юг, образуя 64 перекрестка. На перекрестках в шахматном порядке дежурят сотрудники ГАИ. Часть дорог была занесена снегом так, что в городе не осталось ни одного кругового маршрута, однако, между любыми двумя перекрестками какой-то путь остался (дорога может быть занесена снегом частично). Назовем тупиком такой перекресток, к которому подходит только одна незанесенная снегом дорога. Может ли оказаться, что в каждом тупике дежурит сотрудник ГАИ?
- Сеть авиалиний считается надёжной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалинии. Авиакомпания, после хода которой получается надёжная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выиграет при правильной игре?
- Дан граф на 100 вершинах. Известно, что при удалении любой вершины в полученном графе можно выделить 33 треугольника, не имеющих общих вершин. Какое наименьшее число рёбер может быть в данном графе?