Математическая программа в «Сириусе»
1–12 декабря 2023 г., 8 класс
Материалы занятий

Содержание

Часть I

Алгебра, 8–1

Неравенства о средних

Неравенства о средних для двух чисел. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Тогда

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Все эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда $a = b$. Четыре выписанные величины называются соответственно *средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел a и b.

1. Докажите неравенства о средних для 2 чисел.

2. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?

3. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$.

Определение. Выражения

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},\ \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

называются соответственно *средним арифметическим*, *средним геометрическим*, *средним гармоническим* и *средним квадратическим* набора неотрицательных чисел x_1, x_2, …, x_n.

4. **(а)** Докажите неравенство о средних для четырёх переменных: для любых неотрицательных чисел a, b, c, d

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

Когда здесь достигается равенство?

(б) Докажите неравенство о средних для трёх переменных: для любых неотрицательных чисел a, b, c

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Когда здесь достигается равенство?

Подсказка: подставьте в предыдущее неравенство какое-то конкретное d.

5. Докажите в случае трёх и четырёх слагаемых неравенства между
(а) средним гармоническим и средним геометрическим;
(б) средним арифметическим и средним квадратическим.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенства

(а)

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)};$$

(б)

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Неравенства о средних — 2

1. Докажите, что любые положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c).$$

2. Произведение положительных чисел a_1, a_2,…, a_n равно 1. Докажите, что

$$(2 + a_1)(2 + a_2)\dots(2 + a_n) \geqslant 3^n.$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

4. Даны вещественные числа $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Докажите, что

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc \geqslant ab + bc + ca$. Докажите, что

$$\sqrt{abc} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + ac + bc.$$

7. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$. Докажите

$$\frac{1}{1 + b^3 + c^3} + \frac{1}{1 + c^3 + a^3} + \frac{1}{1 + a^3 + b^3} \leqslant 1.$$

8. Для неотрицательных чисел докажите, что

$$\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1x_2} + \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2x_3} + \ldots + \frac{1 + x_n^2}{1 + x_nx_1} \geqslant n.$$

Неравенства о средних. Добавка

1. Даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Квадратный трёхчлен

1. Докажите, что при любых ненулевых a, b, c имеет корень хотя бы одно из уравнений

$$ax^2 + 2bx + c = 0,\ bx^2 + 2cx + a = 0,\ cx^2 + 2ax + b = 0.$$

2. Докажите, что для любых чисел a, b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

3. Докажите, что при любых значениях a, b, c хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + bx + c = 1,\ x^2 + cx + a = 1,\ x^2 + ax + b = 1$$

имеет корень.

4. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что

$$f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон этого многоугольника, а B — сумма длин оставшихся, то $f(A) = f(B)$.

5. Будем говорить, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ переставляет пару различных чисел s, t, если $as^2 + bs + c = t$ и $at^2 + bt + c = s$. Может ли один и тот же трёхчлен переставлять две различные пары?

6. Даны три квадратных трёхчлена с попарно различными старшими коэффициентами, графики любых двух из которых имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку.

7. Существует ли такая последовательность натуральных чисел a_1, a_2,..., a_n, ..., что уравнение $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ имеет хотя бы один действительный корень при всех натуральных n?

8. Даны квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Может ли уравнение

$$f(g(h(x))) = 0$$

иметь корни $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

Трёхчленный квадрат

1. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена ax^2+bx+c являются степенями двойки. Докажите, что если его корни целые, то они совпадают.

2. Пусть $f(x)$ — приведённый квадратный трёхчлен, который имеет два различных действительных корня, из которых ровно один принадлежит отрезку $[0,1]$. Докажите, что $f(f(0)) \leqslant 0$.

3. Можно ли выбрать 100 последовательных чётных чисел и разбить их на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_{50}, b_{50}) так, чтобы каждые из 50 трёхчленов
$$x^2+a_1x+b_1,\ x^2+a_2x+b_2,\ \ldots,\ x^2+a_{50}x+b_{50}$$
имел целые корни?

4. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов x^2+ax+b, x^2+bx+a имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите всевозможные значения суммы этих трёх корней.

5. На доске было написано уравнение вида $x^2+px+q=0$ с целыми ненулевыми коэффициентами p и q. Временами к доске подходили школьники, стирали уравнение, после чего составляли и записывали уравнение такого же вида, корнями которого являются коэффициенты стёртого уравнения. В какой-то момент составленное уравнение совпало с тем, что было написано на доске изначально. Какое уравнение изначально было написано на доске?

6. Даны два приведённых квадратных трёхчлена, каждый из которых имеет два различных корня. При этом оба корня одного трёхчлена больше 100, а оба корня другого — меньше 100. Может ли сумма этих трёхчленов иметь два корня, один из которых больше 100, а другой — меньше 100?

7. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2+bx+c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Андрей может увеличить или уменьшить любой коэффициент на 1, заплатив 1 тенге. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 тенге.

8. Даны $n > 1$ приведённых квадратных трёхчленов
$$x^2-a_1x+b_1,\ x^2-a_2x+b_2,\ \ldots,\ x^2-a_nx+b_n,$$
причём все $2n$ чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ различны. Может ли случиться так, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ является корнем одного из этих трёхчленов?

9. Квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами равен квадрату целого числа при любом целом x. Докажите, что $f(x) = (ax+b)^2$ для некоторых целых чисел a, b.

Оценки в теории чисел

1. При каких натуральных n сумма цифр числа 5^n равна 2^n?

2. Существуют ли такие 2023 попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя ровно в 1000 раз?

3. Найдите все степени двойки такие, что при вычёркивании первой цифры их десятичной записи снова получается степень двойки.

4. Шесть четырёхзначных чисел взаимно просты в совокупности. Докажите, что можно убрать одно из них так, что оставшиеся пять чисел тоже будут взаимно просты в совокупности.

5. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что одно из этих чисел равно нулю.

6. Пусть $S(m)$ — это сумма цифр числа m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных k таких, что $S(3^k) \geqslant S(3^{k+1})$.

7. Натуральные a, x, y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?

8. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2023-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

Оценки в последовательностях

1. Дано натуральное число n. На доске написана строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $a_{k+1} \leqslant 2k$ при любом $k \geqslant 1$. Докажите, что найдутся два члена этой последовательности, которые отличаются ровно на n.

2. Пусть a_1, a_2, a_3 —бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а p_1, p_2, p_3, … —последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа a_1, a_2, …просты.

3. Для каждого члена a_n бесконечной последовательности натуральных чисел либо $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ — нечётное целое число, большее 1, либо $a_{n+1} - a_n = 1$. Докажите, что последовательность a_n содержит степень тройки.

4. Последовательность натуральных чисел удовлетворяет равенству $a_{n+1} = a_n + 2[\sqrt{a_n}]$. Докажите, что в этой последовательности есть точный квадрат.

5. Докажите, что найдётся натуральное число $n > 10^{2023}$ такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

Часть II

Алгебра, 8–2

Неравенства о средних

Неравенства о средних для двух чисел. Пусть $a > 0$ и $b > 0$. Тогда

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Все эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда $a = b$. Четыре выписанные величины называются соответственно *средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел a и b.

1. Докажите неравенства о средних для 2 чисел.

2. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?

3. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$.

Определение. Выражения

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},\ \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

называются соответственно *средним арифметическим*, *средним геометрическим*, *средним гармоническим* и *средним квадратическим* набора неотрицательных чисел x_1, x_2, …, x_n.

4. **(а)** Докажите неравенство о средних для четырёх переменных: для любых неотрицательных чисел a, b, c, d
$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$
Когда здесь достигается равенство?

   (б) Докажите неравенство о средних для трёх переменных: для любых неотрицательных чисел a, b, c
$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$
Когда здесь достигается равенство?

   Подсказка: подставьте в предыдущее неравенство какое-то конкретное d.

5. Докажите в случае трёх и четырёх слагаемых неравенства между
   (а) средним гармоническим и средним геометрическим;
   (б) средним арифметическим и средним квадратическим.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенства

(а)

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)};$$

(б)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Неравенства о средних — 2

1. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

2. Используя неравенство о средних, докажите, что любые неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют неравенству

(а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$;

(б) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e)$;

(в) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$.

3. Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{1}{x^3}$ при положительных x.

4. Произведение положительных чисел a_1, a_2,..., a_n равно 1. Докажите, что

$$(2 + a_1)(2 + a_2)\dots(2 + a_n) \geqslant 3^n.$$

5. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

6. Даны вещественные числа $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Докажите, что

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc \geqslant ab + bc + ca$. Докажите, что

$$\sqrt{abc} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + ac + bc.$$

Неравенства о средних. Добавка

1. Даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

2. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc=1$. Докажите

$$\frac{1}{1+b^3+c^3}+\frac{1}{1+c^3+a^3}+\frac{1}{1+a^3+b^3}\leqslant 1.$$

3. Для неотрицательных чисел докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant n.$$

Квадратный трёхчлен

1. Докажите, что при любых ненулевых a, b, c имеет корень хотя бы одно из уравнений

$$ax^2 + 2bx + c = 0,\ bx^2 + 2cx + a = 0,\ cx^2 + 2ax + b = 0.$$

2. Докажите, что для любых чисел a, b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

3. Докажите, что при любых значениях a, b, c хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + bx + c = 1,\ x^2 + cx + a = 1,\ x^2 + ax + b = 1$$

имеет корень.

4. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что

$$f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон этого многоугольника, а B — сумма длин оставшихся, то $f(A) = f(B)$.

5. Будем говорить, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c переставляет пару различных чисел s, t, если $as^2 + bs + c = t$ и $at^2 + bt + c = s$. Может ли один и тот же трёхчлен переставлять две различные пары?

6. Квадратные трёхчлены f, g, h таковы, что при каждом действительном x числа $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ являются длинами сторон некоторого треугольника, а числа $f(x)-1$, $g(x)-1$ и $h(x)-1$ не являются длинами сторон треугольника. Докажите, что хотя бы один из многочленов $f + g - h$, $f + h - g$, $g + h - f$ постоянен.

7. Даны три квадратных трёхчлена с попарно различными старшими коэффициентами, графики любых двух из которых имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку.

8. Существует ли такая последовательность натуральных чисел a_1, a_2,…, a_n, …, что уравнение $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ имеет хотя бы один действительный корень при всех натуральных n?

Квадратный трёхчлен — 2

1. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена ax^2+bx+c являются степенями двойки. Докажите, что если его корни целые, то они совпадают.

2. Пусть $f(x)$ — приведённый квадратный трёхчлен, который имеет два различных действительных корня, из которых ровно один принадлежит отрезку $[0,1]$. Докажите, что $f(f(0)) \leqslant 0$.

3. Можно ли выбрать 100 последовательных чётных чисел и разбить их на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_{50}, b_{50}) так, чтобы каждые из 50 трёхчленов

$$x^2 + a_1x + b_1,\ x^2 + a_2x + b_2,\ \dots,\ x^2 + a_{50}x + b_{50}$$

имел целые корни?

4. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов x^2+ax+b, x^2+bx+a имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите всевозможные значения суммы этих трёх корней.

5. На доске было написано уравнение вида $x^2+px+q=0$ с целыми ненулевыми коэффициентами p и q. Временами к доске подходили школьники, стирали уравнение, после чего составляли и записывали уравнение такого же вида, корнями которого являются коэффициенты стёртого уравнения. В какой-то момент составленное уравнение совпало с тем, что было написано на доске изначально. Какое уравнение изначально было написано на доске?

6. Даны два приведённых квадратных трёхчлена, каждый из которых имеет два различных корня. При этом оба корня одного трёхчлена больше 100, а оба корня другого — меньше 100. Может ли сумма этих трёхчленов иметь два корня, один из которых больше 100, а другой — меньше 100?

7. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Андрей может увеличить или уменьшить любой коэффициент на 1, заплатив 1 тенге. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 тенге.

8. Даны $n > 1$ приведённых квадратных трёхчленов

$$x^2 - a_1x + b_1,\ x^2 - a_2x + b_2,\ \dots,\ x^2 - a_nx + b_n,$$

причём все $2n$ чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ различны. Может ли случиться так, что каждое из чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ является корнем одного из этих трёхчленов?

Оценки в теории чисел

1. При каких натуральных n сумма цифр числа 5^n равна 2^n?

2. Существуют ли такие 2023 попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя ровно в 1000 раз?

3. Найдите все степени двойки такие, что при вычёркивании первой цифры их десятичной записи снова получается степень двойки.

4. Шесть четырёхзначных чисел взаимно просты в совокупности. Докажите, что можно убрать одно из них так, что оставшиеся пять чисел тоже будут взаимно просты в совокупности.

5. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что одно из этих чисел равно нулю.

6. Пусть $S(m)$ — это сумма цифр числа m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных k таких, что $S(3^k) \geqslant S(3^{k+1})$.

7. Натуральные a, x, y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?

8. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2023-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

Оценки в последовательностях

1. Дано натуральное число n. На доске написана строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $a_{k+1} \leqslant 2k$ при любом $k \geqslant 1$. Докажите, что найдутся два члена этой последовательности, которые отличаются ровно на n.

2. Пусть a_1, a_2, a_3 —бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ —последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$просты.

3. Для каждого члена a_n бесконечной последовательности натуральных чисел либо $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ — нечётное целое число, большее 1, либо $a_{n+1} - a_n = 1$. Докажите, что последовательность a_n содержит степень тройки.

4. Последовательность натуральных чисел удовлетворяет равенству $a_{n+1} = a_n + 2[\sqrt{a_n}]$. Докажите, что в этой последовательности есть точный квадрат.

5. Докажите, что найдётся натуральное число $n > 10^{2023}$ такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

Часть III

Геометрия, 8–1

Вписанные четырехугольники

1. Окружность, проходящая через вершины B и C меньшего основания трапеции $ABCD$, пересекает её диагонали в точках P и Q. Докажите, что точки A, P, Q и D лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC известно, что $2\angle B = 3\angle C$. Пусть точки D и E на стороне AC таковы, что BD и BE делят угол B на три равные части (и D лежит на отрезке AE), а точка F — основание биссектрисы угла C треугольника. Докажите, что $BE \parallel DF$.

3. В треугольнике ABC провели высоту BH. На этой высоте взяли произвольную точку K, отличную от B, и опустили перпендикуляры KM и KN на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что точки A, M, N, C лежат на одной окружности в случае, если:
   (а) треугольник ABC остроугольный;
   (б) угол A тупой.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, точка K — середина меньшей дуги AB (т. е. не содержащей точек C и D). Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

5. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q, что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R, что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.

6. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Точки P и Q на окружности ω таковы, что $CP \perp AM$, $CQ \perp BM$. Доказать, что $PB \parallel QA$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AL. Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает меньшую дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точки D, K и середина меньшей дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

Вписанные четырехугольники — 2

На разбор. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P такая, что $\angle BAP = \angle BCP$. Докажите, что $\angle CBP = \angle CDP$.

1. Вне параллелограмма $ABCD$ выбрана точка X такая, что $\angle XBC = 110°$ и $\angle XAB = \angle XCB = 20°$. Чему равен $\angle XDC$?

2. **Еще один признак вписанности.** Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle CBD$, $AD = CD$, $AB \neq BC$. Докажите, что этот четырехугольник вписан в окружность.

3. В треугольнике ABC точка I является центром вписанной окружности. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AA_1 пересекает биссектрисы углов B и C в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, I, X, Y лежат на одной окружности.

4. На высоте остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, проведенной из вершины A, выбрана точка X. Оказалось, что $\angle ABX = \angle ACX$. Докажите, что X совпадает с ортоцентром треугольника ABC.

5. Докажите, что если биссектрисы углов при вершинах A и B вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне CD, то $CD = AD + BC$.

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90°$, а M — середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. На сторонах AD и CD взяты соответственно точки E и F так, что $AE = BC$, $CF = AB$. Точка M — середина FE. Докажите, что угол AMC – прямой.

8. Внутри треугольника ABC взята точка P такая, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle BAP = \angle BCP$. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, причем $BP = 2PM$. Докажите, что точки A, P и N лежат на одной прямой.

Касание

Утверждение 1. Пусть на окружности ω отмечены точки A и B, а также через точку A проведена прямая ℓ. Тогда ℓ касается ω тогда и только тогда, когда угол между ℓ и хордой AB равен половине градусной меры дуги AB, лежащей внутри этого угла.

Утверждение 2. Пусть две окружности имеют общую точку A. Тогда они касаются в этой точке тогда и только тогда, когда у них общая касательная в точке A.

1. Две окружности касаются внешним образом в точке D. Прямая касается одной окружности в точке A и пересекает другую в точках B и C (точка B лежит между точками A и C). Известно, что $\angle BDC = 12°$. Чему равен $\angle ADB$?

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбрали точки E и D соответственно, отрезки AD и BE пересеклись в точке F. Оказалось, что $FD = DC = CF$ и $AF = BD$. Докажите, что прямые DF и DC касаются описанной окружности треугольника FEC.

3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC, восстановленные в точке H, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle BAC = 90°$. На меньших дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1, отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.

5. **Лемма Архимеда.** Пусть пара окружностей касаются в точке C внутренним образом, и во внешней окружности проведена хорда AB, касающаяся внутренней окружности в точке D. Докажите, что прямая CD проходит через середину дуги AB, не содержащей точки C.

6. Окружности ω_1 и ω_2 внутренним образом касаются окружности Ω в точках A и B соответственно. Хорда окружности Ω касается окружностей ω_1 и ω_2 внешним образом в точках C и D соответственно. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через C' параллельно AC, касается описанной окружности треугольника $B'OC$.

8. Точка I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Внутри треугольника ABC расположена окружность ω, которая касается сторон AB и AC в точках X и Y. Пусть Z – одна из двух точек пересечения ω с описанной окружностью треугольника BIC. Докажите, что описанные окружности треугольников BXZ и CYZ касаются.

Вписанные углы. Добавка

1. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

2. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC, соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников BOC и ADE, касаются.

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Внутри треугольника отмечена точка P так, что $\angle CPM = \angle PAB$. Пусть ω – описанная окружность треугольника ABP. Прямая MP вторично пересекает ω в точке Q, а точка R симметрична P относительно касательной к ω в точке B. Докажите, что $QR = BC$.

Ортоцентр

1. **Отражение ортоцентра.** Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что:
   (а) Точка, симметричная H относительно прямой AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC;
   (б) Точка, симметричная H относительно середины стороны AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, причем является диаметрально противоположной точке B.

Следствие. Описанная окружность треугольника ABC с ортоцентром H при симметриях относительно сторон AB, BC, AC соответственно переходит в описанные окружности треугольников ABH, BCH, ACH соответственно.

2. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до стороны BC вдвое меньше длины отрезка AH, где H — ортоцентр треугольника.

3. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1, равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

5. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная HM, пересекает стороны AC, AB в точках B_1, C_1. Докажите, что точка H — середина отрезка B_1C_1.

6. Пусть AP и BQ – высоты остроугольного треугольника ABC. На его описанной окружности нашлась точка R, симметричная Q относительно AP. Найдите $\dfrac{BP}{PC}$.

7. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H, центр описанной окружности O и провели высоту AD. Докажите, что образ центра описанной окружности треугольника DHO при симметрии относительно прямой OH лежит на средней линии исходного треугольника, параллельной стороне BC.

Лемма о трезубце

1. **(а) Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка J_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка W — середина меньшей дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $WB = WC = WI = WJ_A$.
   (б) Внешняя лемма о трезубце. В треугольнике ABC точки J_B, J_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно. Точка N — середина большей дуги BC (т.е. дуги, содержащей точку A). Докажите, что $NB = NC = NJ_B = NJ_C$.

2. Биссектриса угла A неравнобедренного треугольника ABC повторно пересекает его описанную окружность в точке D. Окружность с центром в точке D и радиусом DC повторно пересекает AC в точке B'. Прямая BB' пересекает описанную окружность в точке E. Докажите, что B' является ортоцентром треугольника AED.

3. **Окружность Эйлера.** Рассмотрим остроугольный треугольник ABC с высотами AA_1, BB_1, CC_1, пересекающимися в точке H. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется ортотреугольником треугольника ABC.
   (а) Докажите, что $A_1A,\ B_1B,\ C_1C$ — биссектрисы углов ортотреугольника.
   (б) С помощью леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины отрезков AH, BH, CH.
   (в) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины сторон AB, BC, CA.

4. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

5. В треугольнике ABC выбрана такая точка P, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с I.

6. На меньших дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC выбраны точки M, N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC.

7. В треугольнике ABC, в котором $AB < BC$, отметили центр вписанной окружности I, середину стороны AC — точку D, и середину дуги ABC — точку N. На стороне AB отметили такую точку E, что $AE = AD$. Докажите, что точки B, N, I, E лежат на одной окружности.

Метрические критерии вписанности и касания

- **Произведение отрезков хорд.** Отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Тогда точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.
- **Произведение отрезков секущих.** На одной стороне угла с вершиной M отмечены точки A, C, а на другой — точки B, D (в порядке удаленности от M). Тогда точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.
- **Квадрат касательной.** На одной стороне угла с вершиной M отмечены точки A, C, а на другой — точка K. Тогда MK — касательная к описанной окружности треугольника ACK тогда и только тогда, когда $MA \cdot MC = MK^2$.

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На отрезке AB выбрали точку M. Через точку M провели хорду PQ окружности ω_1 и хорду RS окружности ω_2. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC отметили середину стороны AC – точку M, а также середину MC — точку N. Точка K на стороне BC такова, что четырехугольник $ABKN$ — вписанный. Докажите, что прямая AC касается описанной окружности треугольника BKM.

3. Из точки P вне окружности ω с центром в точке O проведены касательные PA и PB к окружности ω (A и B — точки касания), а также через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках C и D. Докажите, что середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника COD.

4. В треугольнике ABC проведена медиана AM. На ней отметили точку K такую, что $\angle BAC = \angle KMC = \angle KCA$. Докажите, что длины касательных из точек A и B к описанной окружности треугольника KMC равны.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а точка O — центр описанной окружности ABC. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника A_1OH.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

7. На стороне DE правильного пятиугольника $ABCDE$ отмечена точка P. Точки Q и R симметричны точке P относительно точек D и E соответственно. Описанная окружность треугольника APC вторично пересекает отрезок AR в точке S. Найдите угол QSR.

8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AP и отметили середину M стороны AB. Известно, что стороны треугольника удовлетворяют соотношению $AC + BC = \sqrt{2}AB$. Докажите, что описанная окружность треугольника BMP касается прямой AC.

Часть IV

Геометрия, 8–2

Вписанные четырехугольники

1. Окружность, проходящая через вершины B и C меньшего основания трапеции $ABCD$, пересекает её диагонали в точках P и Q. Докажите, что точки A, P, Q и D лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC известно, что $2\angle B = 3\angle C$. Пусть точки D и E на стороне AC таковы, что BD и BE делят угол B на три равные части (и D лежит на отрезке AE), а точка F — основание биссектрисы угла C треугольника. Докажите, что $BE \parallel DF$.

3. В треугольнике ABC провели высоту BH. На этой высоте взяли произвольную точку K, отличную от B, и опустили перпендикуляры KM и KN на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что точки A, M, N, C лежат на одной окружности в случае, если:
   (а) треугольник ABC остроугольный;
   (б) угол A тупой.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, точка K — середина меньшей дуги AB (т. е. не содержащей точек C и D). Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

5. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка Q, что $AQ = DP$. На продолжении стороны DC за точку D отмечена такая точка R, что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.

6. На описанной окружности ω треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Точки P и Q на окружности ω таковы, что $CP \perp AM$, $CQ \perp BM$. Доказать, что $PB \parallel QA$.

7. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AL. Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает меньшую дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точки D, K и середина меньшей дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

Вписанные четырехугольники — 2

На разбор. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P такая, что $\angle BAP = \angle BCP$. Докажите, что $\angle CBP = \angle CDP$.

1. Вне параллелограмма $ABCD$ выбрана точка X такая, что $\angle XBC = 110°$ и $\angle XAB = \angle XCB = 20°$. Чему равен $\angle XDC$?

2. **Еще один признак вписанности.** Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle CBD$, $AD = CD$, $AB \neq BC$. Докажите, что этот четырехугольник вписан в окружность.

3. В треугольнике ABC точка I является центром вписанной окружности. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AA_1 пересекает биссектрисы углов B и C в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки A, I, X, Y лежат на одной окружности.

4. На высоте остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, проведенной из вершины A, выбрана точка X. Оказалось, что $\angle ABX = \angle ACX$. Докажите, что X совпадает с ортоцентром треугольника ABC.

5. Докажите, что если биссектрисы углов при вершинах A и B вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне CD, то $CD = AD + BC$.

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90°$, а M — середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. На сторонах AD и CD взяты соответственно точки E и F так, что $AE = BC$, $CF = AB$. Точка M — середина FE. Докажите, что угол AMC – прямой.

8. Внутри треугольника ABC взята точка P такая, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle BAP = \angle BCP$. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, причем $BP = 2PM$. Докажите, что точки A, P и N лежат на одной прямой.

Касание

Утверждение 1. Пусть на окружности ω отмечены точки A и B, а также через точку A проведена прямая ℓ. Тогда ℓ касается ω тогда и только тогда, когда угол между ℓ и хордой AB равен половине градусной меры дуги AB, лежащей внутри этого угла.

Утверждение 2. Пусть две окружности имеют общую точку A. Тогда они касаются в этой точке тогда и только тогда, когда у них общая касательная в точке A.

1. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ.

2. Окружность ω касается прямой l. Две другие окружности касаются прямой l в точках A и B и окружности ω внешним образом в точках C и D. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC, восстановленные в точке H, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle BAC = 90°$. На меньших дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1, отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбрали точки E и D соответственно, отрезки AD и BE пересеклись в точке F. Оказалось, что $FD = DC = CF$ и $AF = BD$. Докажите, что прямые DF и DC касаются описанной окружности треугольника FEC.

6. Дан квадрат $ABCD$. Окружность ω_1 имеет центр в точке D и радиус, равный стороне квадрата, а окружность ω_2 построена на AD как на диаметре. Точка K — произвольная точка на дуге AC окружности ω_1. Отрезок DK пересекает ω_2 в точке L. Докажите, что длина KL равна расстоянию от точки K до стороны AB.

7. **Лемма Архимеда.** Пусть пара окружностей касаются в точке C внутренним образом, и во внешней окружности проведена хорда AB, касающаяся внутренней окружности в точке D. Докажите, что прямая CD проходит через середину дуги AB, не содержащей точки C.

8. Дан треугольник ABC с прямым углом A; в нём проведена высота AH. Центры вписанных окружностей треугольников ABH и ACH обозначены за I_1 и I_2 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABI_1 и ACI_2 касаются.

Вписанные углы. Добавка

1. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

2. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки A на биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC, соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников BOC и ADE, касаются.

3. Точка O – центр описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника ABC с основанием BC. Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через C' параллельно AC, касается описанной окружности треугольника $B'OC$.

Ортоцентр

1. **Отражение ортоцентра.** Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что:
   (а) Точка, симметричная H относительно прямой AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC;
   (б) Точка, симметричная H относительно середины стороны AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, причем является диаметрально противоположной точке B.

Следствие. Описанная окружность треугольника ABC с ортоцентром H при симметриях относительно сторон AB, BC, AC соответственно переходит в описанные окружности треугольников ABH, BCH, ACH соответственно.

2. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до стороны BC вдвое меньше длины отрезка AH, где H — ортоцентр треугольника.

3. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка D, диаметрально противоположная точке B. Точки M и N таковы, что четырехугольники $CDAM$ и $CABN$ — параллелограммы. Докажите, что $MN = BD$.

4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1, равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

6. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная HM, пересекает стороны AC, AB в точках B_1, C_1. Докажите, что точка H — середина отрезка B_1C_1.

7. Пусть AP и BQ — высоты остроугольного треугольника ABC. На его описанной окружности нашлась точка R, симметричная Q относительно AP. Найдите $\dfrac{BP}{PC}$.

8. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

Лемма о трезубце

1. **(а) Лемма о трезубце.** В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка J_A – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка W – середина меньшей дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $WB = WC = WI = WJ_A$.
   (б) Внешняя лемма о трезубце. В треугольнике ABC точки J_B, J_C — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно. Точка N — середина большей дуги BC (т.е. дуги, содержащей точку A). Докажите, что $NB = NC = NJ_B = NJ_C$.

2. Отрезок, соединяющий середины меньших дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Биссектриса угла A неравнобедренного треугольника ABC повторно пересекает его описанную окружность в точке D. Окружность с центром в точке D и радиусом DC повторно пересекает AC в точке B'. Прямая BB' пересекает описанную окружность в точке E. Докажите, что B' является ортоцентром треугольника AED.

4. **Окружность Эйлера.** Рассмотрим остроугольный треугольник ABC с высотами AA_1, BB_1, CC_1, пересекающимися в точке H. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется ортотреугольником треугольника ABC.
   (а) Докажите, что A_1A, B_1B, C_1C – биссектрисы углов ортотреугольника.
   (б) С помощью леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины отрезков AH, BH, CH.
   (в) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины сторон AB, BC, CA.

5. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

6. В треугольнике ABC выбрана такая точка P, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с I.

7. На меньших дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC выбраны точки M, N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC.

Метрические критерии вписанности и касания

- **Произведение отрезков хорд.** Отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Тогда точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.
- **Произведение отрезков секущих.** На одной стороне угла с вершиной M отмечены точки A, C, а на другой – точки B, D (в порядке удаленности от M). Тогда точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.
- **Квадрат касательной.** На одной стороне угла с вершиной M отмечены точки A, C, а на другой — точка K. Тогда MK — касательная к описанной окружности треугольника ACK тогда и только тогда, когда $MA \cdot MC = MK^2$.

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. На отрезке AB выбрали точку M. Через точку M провели хорду PQ окружности ω_1 и хорду RS окружности ω_2. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Окружность, описанная около треугольника ABM, повторно пересекает AC в точке K, а окружность, описанная около треугольника AMC, пересекает AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$.

3. В треугольнике ABC отметили середину стороны AC — точку M, а также середину MC — точку N. Точка K на стороне BC такова, что четырехугольник $ABKN$ — вписанный. Докажите, что прямая AC касается описанной окружности треугольника BKM.

4. Из точки P вне окружности ω с центром в точке O проведены касательные PA и PB к окружности ω (A и B – точки касания), а также через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках C и D. Докажите, что середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника COD.

5. В треугольнике ABC проведена медиана AM. На ней отметили точку K такую, что $\angle BAC = \angle KMC = \angle KCA$. Докажите, что длины касательных из точек A и B к описанной окружности треугольника KMC равны.

6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а точка O – центр описанной окружности ABC. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника A_1OH.

7. На основании BC равнобокой трапеции $ABCD$ отмечена точка P. Точки Q и R симметричны P относительно точек B и C соответственно. Описанная окружность треугольника APD вторично пересекает отрезок DR в точке S. Докажите, что точки D, S, C, Q лежат на одной окружности.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D такова, что $ABCD$ – параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

Часть V

Комбинаторика, 8–1

Ориентированные графы

Определение. *Ориентированный граф* — граф, ребра которого имеют направление. По умолчанию в ориентированном графе нет петель и сонаправленных кратных ребер, но допускаются противоположно направленные ребра.

Определение. Пути и циклы в ориентированном графе — то же самое, что пути и циклы в обычном графе, но каждое ребро может быть пройдено только в соответствии с направлением от начала к концу.

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным,* если из любой его вершины существует путь до любой другой.

1. **(а)** Две вершины u и v в ориентированном графе назовём *связанными*, если существует путь из u в v и путь из v в u. Докажите, что вершины ориентированного графа разбиваются на части (которые далее мы будем называть *компонентами сильной связности*) такие, что пара вершин u и v связана тогда и только тогда, когда они находятся в одной компоненте сильной связности.
(б) Докажите, что компонента сильной связности сильно связна.
(в) Докажите, что можно пронумеровать компоненты сильной связности так, чтобы рёбра между компонентами вели из компонент с меньшим номером в компоненты с бóльшим.

2. **(а)** Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.
(б) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n-2$ рёбер.
(в) Докажите, что если любые две вершины соединяет не более одного ребра, то можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n-3$ рёбер.
(г) Докажите, что для каждого k, $n \leqslant k \leqslant 2n-2$, существует сильно связный граф на n вершинах, в котором k ребер, такой, что при выкидывании любого ребра он перестаёт быть сильно связным.

3. Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину A. Докажите, что граф сильно связный.

4. В ориентированном графе 200 вершин. Известно, что
(а) в каждую вершину входит и выходит хотя бы одно ребро.
(б) для каждой вершины модуль разности входящих и выходящих из неё рёбер равен 1.
Докажите, что можно провести не более 100 новых рёбер так, чтобы граф стал силь-

но связным.

5. В стране несколько городов, соединённых дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путём, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.

Турниры

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется *турниром*.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

1. **(а)** Докажите, что в любом турнире найдётся вершина, из которой можно добраться до любой другой.
(б) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(в) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

2. Дан турнир с n вершинами, не являющийся сильно связным. У какого наименьшего количества рёбер нужно поменять направление так, чтобы граф стал сильно связным?

3. Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух.
(а) Докажите, что в любом турнире найдётся царь.
(б) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то из него выходят рёбра во все другие вершины.

4. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно добраться до любого другого, не выезжая за пределы республики.

5. **(а)** Верно ли, что из сильно связного ориентированного графа всегда можно удалить вершину так, что он останется сильно связным?
(б) Докажите, что в сильно связном турнире с $n > 4$ вершинами существует вершина такая, что при её удалении сильная связность графа не теряется.
(в) Докажите, что вершин с описанным свойством хотя бы две.

6. Докажите, что в сильно связном турнире с $n \geqslant 3$ вершинами через каждую его вершину проходит
(а) простой цикл длины 3;
(б) простой цикл любой длины k, где $3 \leqslant k \leqslant n$.

Ориентированные графы. Задачи поинтереснее

1. В Москве двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Москве можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.

2. Дан связный неориентированный граф. Известно, что при удалении любого ребра граф остается связным. Лёша и Витя играют в следующую игру. Ходы делаются по очереди, начинает Лёша. Каждым ходом нужно ориентировать одно из неориентированных к этому моменту ребер. При этом если после хода игрока появляется такая пара вершин A и B, что от A к B нельзя пройти по ребрам (с учетом ориентации), то этот игрок проигрывает. Если же все ребра ориентированы и никто не проиграл, то объявляется ничья. Кто выиграет при правильной игре?

3. Пусть k — натуральное число, меньшее чем количество вершин турнира. Докажите, что если для любых k вершин найдется вершина, из которой рёбра ведут в каждую из этих k вершин, то всего вершин не меньше $2^{k+1} - 1$.

4. Докажите, что в турнире с $n \geqslant 6$ вершинами существует такой гамильтонов путь $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$, что $v_1 \to v_n$, если
   (а) n нечётное; **(б)** n чётное.

5. Докажите, что в турнире с $n \geqslant 7$ вершинами найдётся вершина, инвертированием всех рёбер в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.

6. Дан турнир с $n \geqslant 3$ вершинами. Для каждого $3 \leqslant k \leqslant n$ определите, какое наименьшее количество простых циклов длины k в нём может быть.

КГ. Принцип крайнего и упорядочивание

1. Можно ли на плоскости расположить 2023 отрезка так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

2. На прямой выбраны несколько отрезков. Известно, что любые два отрезка пересекаются. Докажите, что можно отметить точку, принадлежащую всем отрезкам.

3. На плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.

4. На окружности отмечено n точек, причём известно, что для каждых двух отмеченных точек одна из дуг, соединяющих их, имеет величину, меньшую $120°$. Докажите, что все точки лежат на одной дуге величиной $120°$.

5. На плоскости дано n точек. Середины всех отрезков с концами в этих точках покрашены красным цветом. Докажите, что различных красных точек не менее $2n - 3$.

6. На плоскости расположены несколько точек общего положения (то есть никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что существует несамопересекающийся многоугольник с вершинами в этих точках.

7. **(а)** На плоскости проведено 300 прямых общего положения (то есть никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). По этим прямым плоскость разрезана на куски. Докажите, что среди кусков есть хотя бы один треугольник.
(б) Докажите, что треугольников хотя бы 100.

8. **(а)** На плоскости дано конечное число попарно непараллельных прямых, причем через точку пересечения любых двух из них проходит еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.
(б) На плоскости дано конечное число точек, причем любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой.

Выпуклость

Фигура называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две точки фигуры, целиком лежит внутри фигуры.

В случае многоугольника можно дать два эквивалентных определения.

- Все углы многоугольника меньше 180°.
- Для каждой своей стороны многоугольник лежит целиком в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей эту сторону.

Выпуклой оболочкой множества точек X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X.

1. На плоскости расположены 5 точек общего положения. Докажите, что 4 из них являются вершинами выпуклого многоугольника.

2. На плоскости дано $n > 4$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

3. Несколько прямых, не все из которых параллельны, разбивают плоскость на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — это угол.

4. На плоскости даны 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся угол с вершинами в этих точках, не превосходящий 30°.

5. Какое максимальное количество сторон может быть у выпуклого многоугольника, стороны которого лежат на диагоналях выпуклого 100-угольника?

6. **(а)** Докажите, что выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2.
(б) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить прямоугольник площади $\frac{1}{8}$.

7. Дан n-угольник. Докажите, что множество точек внутри него, из которых целиком видны все его стороны, либо пусто, либо точка, либо отрезок, либо заполняет внутренность выпуклого m-угольника, где $m \leqslant n$.

8. На плоскости даны $3n-1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.

9. На плоскости нарисовано несколько попарно непараллельных прямых, по каждой из которых в одном из двух направлений ползет жук со скоростью 1 сантиметр в секунду. Докажите, что в какой-то момент жуки окажутся в вершинах выпуклого многоугольника.

Часть VI

Комбинаторика, 8–2

Ориентированные графы

Определение. *Ориентированный граф* — граф, ребра которого имеют направление. По умолчанию в ориентированном графе нет петель и сонаправленных кратных ребер, но допускаются противоположно направленные ребра.

Определение. Пути и циклы в ориентированном графе — то же самое, что пути и циклы в обычном графе, но каждое ребро может быть пройдено только в соответствии с направлением от начала к концу.

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным,* если из любой его вершины существует путь до любой другой.

1. **(а)** Две вершины u и v в ориентированном графе назовём *связанными*, если существует путь из u в v и путь из v в u. Докажите, что вершины ориентированного графа разбиваются на части (которые далее мы будем называть *компонентами сильной связности*) такие, что пара вершин u и v связана тогда и только тогда, когда они находятся в одной компоненте сильной связности.
(б) Докажите, что компонента сильной связности сильно связна.
(в) Докажите, что можно пронумеровать компоненты сильной связности так, чтобы рёбра между компонентами вели из компонент с меньшим номером в компоненты с бóльшим.

2. В некотором государстве 101 город.
(а) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
(б) Каждый город соединен с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.

3. **(а)** Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами хотя бы n рёбер.
(б) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с n вершинами можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n-2$ рёбер.
(в) Докажите, что если любые две вершины соединяет не более одного ребра, то можно выделить сильно связный подграф, содержащий все вершины, в котором не более $2n-3$ рёбер.
(г) Докажите, что для каждого k, $n \leqslant k \leqslant 2n-2$, существует сильно связный граф на n вершинах, в котором k ребер, такой, что при выкидывании любого ребра он перестаёт быть сильно связным.

4. Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину A. Докажите, что граф сильно связный.

5. В ориентированном графе 200 вершин. Известно, что

(а) в каждую вершину входит и выходит хотя бы одно ребро.

(б) для каждой вершины модуль разности входящих и выходящих из неё рёбер равен 1.

Докажите, что можно провести не более 100 новых рёбер так, чтобы граф стал сильно связным.

6. В стране некоторые пары городов соединены одной дорогой. На всех дорогах введено одностороннее движение. Известно, что из любого города можно добраться до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Одну дорогу закрыли на ремонт, причём из любого города по-прежнему можно добраться до любого другого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать не более, чем с двумя пересадками.

Турниры

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется *турниром*.

Определение. Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

1. **(а)** Докажите, что в любом турнире найдётся вершина, из которой можно добраться до любой другой.
(б) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(в) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

2. Дан турнир с n вершинами, не являющийся сильно связным. У какого наименьшего количества рёбер нужно поменять направление так, чтобы граф стал сильно связным?

3. Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух.
(а) Докажите, что в любом турнире найдётся царь.
(б) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то из него выходят рёбра во все другие вершины.

4. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно добраться до любого другого, не выезжая за пределы республики.

5. **(а)** Верно ли, что из сильно связного ориентированного графа всегда можно удалить вершину так, что он останется сильно связным?
(б) Докажите, что в сильно связном турнире с $n > 4$ вершинами существует вершина такая, что при её удалении сильная связность графа не теряется.
(в) Докажите, что вершин с описанным свойством хотя бы две.

6. Докажите, что в сильно связном турнире с $n \geqslant 3$ вершинами через каждую его вершину проходит
(а) простой цикл длины 3;
(б) простой цикл любой длины k, где $3 \leqslant k \leqslant n$.

Турниры. Добавка

1. Пусть k — натуральное число, меньшее чем количество вершин турнира. Докажите, что если для любых k вершин найдется вершина, из которой рёбра ведут в каждую из этих k вершин, то всего вершин не меньше $2^{k+1} - 1$.

2. Докажите, что в турнире с $n \geqslant 4$ вершинами существует такой гамильтонов путь $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$, что $v_1 \to v_n$, если
(а) n нечётное; **(б)** n чётное.

3. Докажите, что в турнире с $n \geqslant 7$ вершинами найдётся вершина, инвертированием всех рёбер в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.

4. Дан турнир с $n \geqslant 3$ вершинами. Для каждого $3 \leqslant k \leqslant n$ определите, какое наименьшее количество простых циклов длины k в нём может быть.

КГ. Принцип крайнего и упорядочивание

1. Можно ли на плоскости расположить 2023 отрезка так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

2. На прямой выбраны несколько отрезков. Известно, что любые два отрезка пересекаются. Докажите, что можно отметить точку, принадлежащую всем отрезкам.

3. На плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.

4. На окружности отмечено n точек, причём известно, что для каждых двух отмеченных точек одна из дуг, соединяющих их, имеет величину, меньшую $120°$. Докажите, что все точки лежат на одной дуге величиной $120°$.

5. На плоскости дано n точек. Середины всех отрезков с концами в этих точках покрашены красным цветом. Докажите, что различных красных точек не менее $2n-3$.

6. На плоскости расположены несколько точек общего положения (то есть никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что существует несамопересекающийся многоугольник с вершинами в этих точках.

7. **(а)** На плоскости проведено 300 прямых общего положения (то есть никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). По этим прямым плоскость разрезана на куски. Докажите, что среди кусков есть хотя бы один треугольник.
   (б) Докажите, что треугольников хотя бы 100.

8. **(а)** На плоскости дано конечное число попарно непараллельных прямых, причем через точку пересечения любых двух из них проходит еще одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.
   (б) На плоскости дано конечное число точек, причем любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой.

Выпуклость

Фигура называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две точки фигуры, целиком лежит внутри фигуры.

В случае многоугольника можно дать два эквивалентных определения.

- Все углы многоугольника меньше 180°.
- Для каждой стороны многоугольник лежит целиком в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей эту сторону.

Выпуклой оболочкой множества точек X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X.

1. На плоскости расположены 5 точек общего положения. Докажите, что 4 из них являются вершинами выпуклого многоугольника.

2. Для какого наибольшего n верно, что для любого несамопересекающегося n-угольника он лежит по одну сторону относительно одной из сторон?

3. На плоскости дано $n > 4$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

4. Несколько прямых, не все из которых параллельны, разбивают плоскость на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — это угол.

5. На плоскости даны 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся угол с вершинами в этих точках, не превосходящий 30°.

6. Какое максимальное количество сторон может быть у выпуклого многоугольника, стороны которого лежат на диагоналях выпуклого 100-угольника?

7. **(а)** Докажите, что выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2.
(б) Докажите, что в выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить прямоугольник площади $\frac{1}{8}$.

8. Дан n-угольник. Докажите, что множество точек внутри него, из которых целиком видны все его стороны, либо пусто, либо точка, либо отрезок, либо заполняет внутренность выпуклого m-угольника, где $m \leqslant n$.

9. На плоскости даны $3n-1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.

Часть VII

Тренировочная олимпиада

Тренировочная олимпиада

1. Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было 1, 2, …, 10 конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?

2. На доске написаны n различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трёх наибольших из них меньше трёх миллионов. Сумма квадратов трёх наименьших из них также меньше трёх миллионов. При каком наибольшем n это возможно?

3. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой два соседник клетки (ещё не накрытые другими доминошнами), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Прямые BE и CF второй раз пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Прямая EF пересекает описанные окружности треугольников CEP и BFQ в точках X и Y, отличных от точек E и F. Докажите, что описанная окружность треугольника XDY касается прямой BC.

5. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y.