

Перестановки 2. Чётность

Определение. *Транспозицией* называется перестановка, которая меняет местами два элемента, а остальные оставляет неподвижными.

Определение. *Инверсией* для перестановки σ называется пара чисел $i < j$, такая что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Определение. Перестановка называется *чётной*, если она содержит чётное число инверсий, и *нечётной* в противном случае.

- Докажите, что любую перестановку можно получить последовательным применением транспозиций.
 - Пусть для получения перестановки понадобилось n транспозиций. Докажите, что, независимо от проведённых действий, чётность числа n совпадает с чётностью перестановки.
- Чему равна чётность произведения двух перестановок, если известны чётности каждой из них?
 - Докажите, что чётность перестановки равна чётности количества циклов чётной длины.
- Даны числа от 1 до n . Каких перестановок больше: чётных или нечётных?
- Перед роботом выложены карточки с числами от 1 до n . За одну операцию робот может выбрать любые 3 карточки и переложить их по циклу. Сколько всего перестановок он может получить?
- В квадрат 4×4 кладут 15 фишек, на которых написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации нельзя получить вторую.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 1: к задаче 5

6. Дано n магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и 1 пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот.)
7. Хулиган Вася из кубика Рубика вынул кубик на ребре (не при вершине) и вернул неправильным образом. Докажите, что теперь кубик Рубика невозможно собрать.
8. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?