Квадратичные иррациональности

Определение 1. *Квадратичной иррациональностью* называется иррациональное число, которое можно представить в виде $a+b\sqrt{n}$, где a и b — рациональные числа, а n — натуральное, свободное от квадратов.

Определение 2. *Квадратичной иррациональностью* называется иррациональное число, являющееся корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами.

Определение. Число $\overline{x}=a-b\sqrt{n}$ называется *сопряженным* к квадратичной иррациональности $x=a+b\sqrt{n}$.

1. Докажите, что любую квадратичную иррациональность можно единственным образом представить в виде из определения 1.

2. Докажите, что если квадратичная иррациональность x — корень некоторого многочлена с рациональными коэффициентами, то $\overline{x}$ — тоже его корень.

3. Найдите все рациональные решения уравнения
$$\left(x+y\sqrt{3}\right)^2+\left(z+w\sqrt{3}\right)^2=3+2\sqrt{3}.$$

4. Найдите тысячную цифру после запятой числа $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2024}$.

5. Назовём *белыми* числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где a и b — целые, не равные нулю. Аналогично, назовём *чёрными* числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где c и d — целые, не равные нулю. Может ли чёрное число равняться сумме нескольких белых?

6. Докажите, что для любого натурального n число $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ можно представить в виде $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$, где k — натуральное.

7. **(а)** Зафиксируем n и будем рассматривать квадратичные иррациональности вида $a+b\sqrt{n}$ при целых a и b. Квадратичную иррациональность $x>1$ будем называть *нормированной*, если $x\overline{x}=1$. Пусть для данного n нашлась минимальная нормированная квадратичная иррациональность x_0. Докажите, что остальные нормированные квадратичные иррациональности равны x_0^k, где k — натуральное.
   (б) Решите в целых числах уравнение $x^2-5y^2=1$.

8. Найдите степень вхождения двойки в число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]$.

9. Пусть a, b, c не равные одновременно нулю целые числа, по модулю меньшие миллиона. Докажите, что
$$\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|>\frac{1}{10^{21}}.$$