Вспомогательная площадь

0. (*Не баян, а классика*) Внутри правильного n-угольника выбрана точка. Докажите, что сумма расстояний от неё до сторон n-угольника не зависит от положения точки.

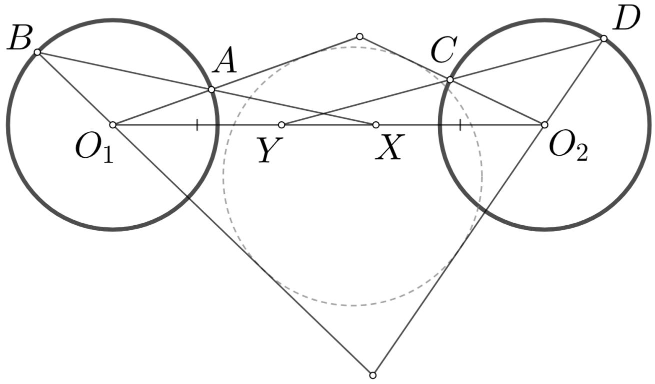
1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC расстояние от вершины A до прямой CD равно длине стороны AB. Докажите, что расстояние от вершины D до стороны AB равно длине стороны CD.

2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

3. В остроугольный треугольник ABC помещены две касающиеся окружности. Одна из них касается сторон AC и BC, а вторая — сторон AB и BC. Докажите, что сумма их радиусов больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. На сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки D_1 и B_1 так, что $BD_1 = DB_1$. Отрезки BB_1 и DD_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что AQ — биссектриса угла BAD.

5. Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1X = O_2Y$. Точки A и B лежат на ω_1 и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2 и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2.



6. Медиана AM треугольника ABC пересекает вписанную в него окружность в точках X и Y. Известно, что $AB = AC + AM$. Найдите $\angle XIY$, где I — центр вписанной окружности.

7. На высоте CH, проведённой из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре построена окружность. Касательные из точек A и B, проведённые к окружности, пересекаются в точке P. Докажите, что касательная из P к окружности равна трети гипотенузы.

8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ верны равенства $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$. Кроме того, биссектрисы углов A, C, E пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектрисы углов B, D, F также пересекаются в одной точке.