

## Перестановки

1. На урок физкультуры пришел класс из  $N$  человек и некоторым образом встал в шеренгу. Учитель физкультуры может попросить старосту класса поменяться с любым другим учеником местами. Докажите, что после нескольких таких просьб он сможет расставить ребят по росту.
2. В вершинах дерева из  $n$  элементов расставлены фишки с номерами  $1, 2, \dots, n$ . За ход разрешается менять местами фишки в вершинах, соединенных ребром. Доказать, что таким образом из любой расстановки фишек можно получить любую другую расстановку.
3. У Мирослава есть карты с цифрами от 1 до 42, разложенные в ряд по порядку. Мирослав умеет мешать карты только одним способом, но он может повторять процедуру перемешивания любое количество раз.
  - (а) Докажите, что через  $42!$  перемешиваний карты обязательно окажутся расположенными по порядку.
  - (б) Мирослав заметил, что впервые карты вновь оказались расположены по порядку спустя 2024 перемешиваний. Докажите, что спустя некоторое количество перемешиваний ровно 19 карт окажется на своем месте.
4. Ярослав придумал комбинацию поворотов кубика Рубика, изменяющую его, а потом взял собранный кубик и повторил эту комбинацию поворотов 101 раз. Докажите, что он не мог получить собранный кубик.
5. В стране  $X$  гражданам разрешили совершать обмен личными именами (но не фамилиями) с любым другим гражданином. При этом паспортный стол позволяет совершать каждому человеку максимум один обмен в день. Докажите, что через два дня у всех жителей в совокупности могла оказаться любая комбинация имен и фамилий.
6. Святослав утверждает, что придумал комбинацию поворотов кубика Рубика, с помощью последовательного применения которой можно получить любое возможное состояние кубика. Докажите, что Святослав не прав.
7. Безумный учёный изобрёл машину, которая может поменять телами двух людей. Несколько друзей учёного решили опробовать машину на себе и начали меняться телами. Когда они решили всё вернуть назад, то оказалось, что на каждой паре людей (сознаний, а не тел) машина работает не более одного раза. Докажите, что учёный и его ассистент смогут всем вернуть их первоначальные тела, если известно, что ни ученый, ни ассистент еще не пользовались машиной.