

Алгебраический разнобой

1. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?
2. Существуют ли нецелые числа x и y , для которых $\{x\}\{y\} = \{x + y\}$?
3. Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.
4. Длины a, b, c сторон некоторого треугольника удовлетворяют равенству

$$2 \cdot (a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2.$$

Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

5. Докажите, что для произвольного приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b$ найдётся иррациональная точка, значение трёхчлена в которой рационально.
6. Для положительных чисел докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} + \dots + \frac{x_n^2}{x_1^2} \geq \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_2}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_1} + \frac{x_n}{x_2}.$$

7. (а) Докажите, что если $x + y + z = 0$, то и $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.
(б) Натуральные числа x, y, z таковы, что

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = xyz.$$

Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3$ делится на $x + y + z + 6$.

8. Игорь написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.