Алгебраический разнобой

1. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

2. Существуют ли нецелые числа x и y, для которых $\{x\}\{y\} = \{x+y\}$?

3. Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

4. Длины a, b, c сторон некоторого треугольника удовлетворяют равенству
$$2 \cdot (a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2.$$
Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

5. Докажите, что для произвольного приведённого квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$ найдётся иррациональная точка, значение трёхчлена в которой рационально.

6. Для положительных чисел докажите неравенство
$$\frac{x_1^4}{x_2^4} + \frac{x_2^4}{x_3^4} + \ldots + \frac{x_n^4}{x_1^4} \geqslant \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

7. **(а)** Докажите, что если $x + y + z = 0$, то и $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.
(б) Натуральные числа x, y, z таковы, что
$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = xyz.$$
Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3$ делится на $x + y + z + 6$.

8. Игорь написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.