

ТЧ с привкусом комбинаторики

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате сумма делилась на 1001.
2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число n , взаимно простое с 10. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на n .
3. (а) На доске написано n целых чисел. Докажите, что среди них найдутся несколько, сумма которых кратна n .
(б) То же самое, но на доске $n - 1$ целое число, не все из них имеют одинаковые остатки при делении на n .
4. Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была равна 100.
5. Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.
6. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций +, −, ×, : и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.
7. Докажите, что найдётся число, представимое в виде суммы квадратов четырёх чисел более чем миллионом различных способов.
8. Существует ли 2024-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2024 разных 2024-значных полных квадратов?