

ТЧ с привкусом комбинаторики

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате сумма делилась на 1001.
2. (а) На доске написано n целых чисел. Докажите, что среди них найдутся несколько, сумма которых кратна n .
(б) То же самое, но на доске $n - 1$ целое число, не все из них имеют одинаковые остатки при делении на n .
3. Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была равна 100.
4. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, \times , $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0? Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.
5. Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.
6. Докажите, что найдётся число, представимое в виде суммы квадратов четырёх чисел более чем миллионом различных способов.
7. Существует ли 2024-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2024 разных 2024-значных полных квадратов?
8. Даны 200 различных натуральных чисел, меньших 300, сумма которых чётна. Докажите, что из этих чисел можно выбрать 100 чисел так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся.