Разнобой по комбинаторике

1. На доске 100×100 расставлено 100 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что в правом верхнем и в левом нижнем квадратах размером 50×50 расставлено равное число ладей.

2. У фокусника есть колода из 52 карт. Он объявляет, что 51 из них будут выкинуты, а останется пиковая дама. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с верхнего или нижнего края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях пиковой дамы можно гарантировать успех фокуса?

3. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у каждых двух из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у каждых двух, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

4. 2023 различных натуральных чисел таковы, что сумма любых двух различных из них не равна ни одному из оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

5. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели?

6. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

7. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы AB, BC, CD, был и рейс AD. Сколько существует способов это сделать?

8. Дано множество $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Найдите такое максимальное n, что существует n различных непустых подмножеств S, удовлетворяющих следующему условию: любые два подмножества либо не пересекаются, либо минимальный элемент их пересечения не является максимальным ни в одном из этих двух подмножеств.