Описанные четырёхугольники

1. Точку, расположенную внутри треугольника, соединили отрезками с серединами его сторон. Образовались три выпуклых четырёхугольника, в два из которых можно вписать окружность. Докажите, что в третий четырёхугольник также можно вписать окружность.

2. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведены общие внешние касательные и отмечены точки касания. Докажите, что эти точки являются вершинами описанного четырёхугольника.

3. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром I. Точка B_1 на стороне AC такова, что $BC = B_1C$. Пусть J центр окружности, вписанной в треугольник ABB_1. Докажите, что прямая, проведенная через точку J параллельно BB_1, касается ω.

4. В треугольнике ABC отметили середины сторон AB и BC (точки C_1 и A_1, соответственно), а также центр вписанной окружности I. Известно, что $\angle C_1IA = 90°$. Докажите, что $\angle A_1IC$ также равен $90°$.

5. **(а)** Выпуклый четырехугольник разбит на четыре меньших четырехугольника как показано на рисунке 1. Известно, что в каждый из полученных четырехугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.
(б) Выпуклый четырехугольник разбили на 9 меньших четырехугольников как показано на рисунке 2. Известно, что в каждый из закрашенных четырехугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.

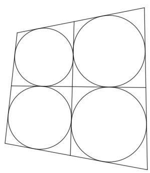

Рис. 1: к задаче 5а

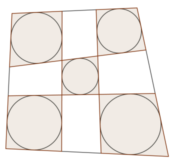

Рис. 2: к задаче 5б

6. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке I. Пусть AB и CD — диаметры окружностей ω_1 и ω_2 такие, что внутрь $ABCD$ можно вписать окружность ω_3. Докажите, что точка I — центр ω_3.

7. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и CC_1, пересекающиеся в точке M. Известно, что в четырехугольник C_1BA_1M можно вписать окружность. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

8. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Пусть отрезки KM и AC пересекаются в точке X. Докажите, что $\frac{AX}{CX} = \frac{AK}{CM}$. Выведите отсюда, что точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $KLMN$ совпадают.