Разнобой

1. На окружности отмечена фиксированная точка A. Выберем на этой окружности точки B и C произвольным образом. Пусть биссектриса угла ABC пересекла окружность в точке X, точка A' симметрична A относительно X, а D – вторая точка пересечения прямой CA' с окружностью. Докажите, что D не зависит от выбора B и C.

2. На окружности ω с центром O отмечены точки A и B так, что $AB > AO$. Пусть C – точка пересечения биссектрисы $\angle OAB$ и ω, отличная от A, а D – точка пересечения прямой AB и описанной окружности треугольника OBC. Докажите, что $AD = AO$.

3. Биссектрисы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. Обозначим M_A, M_B, M_C – середины меньших дуг BC, CA, AB соответственно. Докажите, что точка, симметричная M_A относительно прямой IM_B, лежит на описанной окружности треугольника IM_BM_C.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Биссектриса угла A треугольника впервые пересекает вписанную окружность в точке G. Оказалось, что $BE \parallel FG$. Докажите, что $BD = EF$.

5. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I, которая касается его сторон AB, CD в точках M, N соответственно. Пусть $\angle BAD + \angle ADC < 180°$. Отметим на прямой MN такую точку K, что $AK = AM$. Докажите, что прямая ID делит пополам отрезок KN.

6. Треугольник ABC – равнобедренный с вершиной A, причем $AB > BC$. Пусть ω – окружность с центром A, проходящая через B и C. Продолжения высоты и медианы треугольника ABC, проведенных из точки B, повторно пересекают ω в точках H и G соответственно, а прямые GH и AC пересекаются в точке X. Докажите, что C — середина AX.

7. Дан треугольник ABC. Окружность ω_A проходит через A и касается прямой BC в точке B, а окружность ω_C проходит через C и касается прямой AB в точке B. Пусть M — середина BC, D — вторая точка пересечения окружностей ω_A и ω_C. Прямая MD пересекает прямую AC в точке E. Докажите, что E лежит на ω_A.

8. Дан остроугольный треугольник ABC с центром описанной окружности O, в котором проведены высоты AD, BE, CF соответственно. Касательные к окружности (ABC) в точках B и C пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P перпендикулярно EF, пересекает AD в точке Q. Точка R – основание перпендикуляра из точки A на EF. Докажите, что $DR \parallel OQ$.