Тренировочная олимпиада. Эйлер

1. Против течения реки с постоянной собственной скоростью плывёт, гребя вёслами, человек в лодке. Отплыв 2 км от точки старта M, он обронил шляпу. Спустя 10 минут он обнаружил пропажу, развернулся и подобрал шляпу в точке M. Чему может быть равна скорость течения реки, если известно, что она также постоянна?

2. На доске написано натуральное число, большее 1. Каждую минуту его увеличивают на наибольший натуральный делитель, меньший самого числа. Верно ли, что на доске обязательно появится число, кратное 3^{2024}?

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM. На отрезке AM нашлась такая точка P, что $BP \perp AM$. На отрезке AM выбрана точка Q такая, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

4. Докажите, что у любого натурального числа n существует не более одного простого делителя p, для которого число $n - p$ является квадратом целого числа.

5. В парке есть несколько фонарей, а у сторожа в каморке несколько переключателей. При нажатии на переключатель выключенные фонари, соединенные с ним, включаются, а включенные, соединенные с ним, выключаются. Для каждого множества фонарей есть переключатель, соединенный с нечётным числом фонарей из этого множества (и, возможно, с какими-то фонарями не из этого множества). Докажите, что сторож может погасить все фонари независимо от их начального состояния.