Рациональное и иррациональное

1. Рациональные числа q, s таковы, что сумма $\sqrt{q}+\sqrt[3]{s}$ рациональна. Докажите, что каждое из чисел $\sqrt{q}$, $\sqrt[3]{s}$ рационально.

2. Найдите все x такие, при которых среди четырёх чисел $a = x - \sqrt{2}$, $b = x - \frac{1}{x}$, $c = x + \frac{1}{x}$, $d = x^2 + 2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым.

3. Пусть A — бесконечное множество действительных чисел, в котором не все числа рациональны. Докажите, что для любого $n > 1$ найдется n−элементное подмножество A, сумма элементов которого иррациональна.

4. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и столбца. Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

5. Клетки таблицы 2×2023 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2023 действительных числа, среди которых нет двух равных, а в нижней — те же 2023 числа, но в другом порядке. В каждом из 2023 столбцов должны быть записаны два различных числа, сумма которых должна быть рациональной. Какое наибольшее количество иррациональных чисел может быть в верхней строке таблицы?

6. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех этих чисел рациональны.

7. Прямоугольник разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.

8. Докажите, что существуют натуральные m, n такие, что $|m\sqrt{2} - n| < \frac{1}{10^{100}}$.