Отборочная олимпиада, очный этап

1. Иван записал на доске четыре числа: 2, 3, 2024, 2025. Каждую минуту Иван стирает одно из чисел и пишет вместо него куб этого числа, уменьшенный на произведение оставшихся трёх чисел. Может ли в какой-то момент оказаться, что сумма выписанных на доске чисел равна 0?

Ответ: Не может.

Решение. Покажем, что в каждый момент времени на доске будут два числа, дающие остаток 2 при делении на 3 и два числа, делящихся на 3. В начальный момент это верно. Далее в каждый момент времени, если на доске записаны числа a, b, c, d, то не умаляя общности можно считать, что мы меняем число a на $a^3 + bcd$.

- Если $a \equiv 0 \pmod 3$, то $a^3 + bcd \equiv 0^3 + 0 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 3$.
- Если $a \equiv 2 \pmod 3$, то $a^3 + bcd \equiv 2^3 + 2 \cdot 0 \cdot 0 \equiv 2 \pmod 3$.

Таким образом, проводимые операции не меняют остатки при делении 3 записанных чисел. Следовательно, в каждый момент времени остаток при делении на 3 суммы чисел, записанных на доске, равен 1. Значит, сумма записанных чисел никогда не будет равна 0.

2. Пусть p и q — простые числа, n — натуральное число, удовлетворяющие соотношению
$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$
Найдите все значения, которые может принимать величина $q - p$.

Ответ: 2, 3, 5.

Решение. Отнимем из каждой части равенства 2, получим:
$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} = \frac{4}{n+2}.$$

Приведём к общему знаменателю левую часть:
$$\frac{q-(p+1)}{(p+1)q} = \frac{4}{n+2}.$$

Числитель дроби, стоящей в левой части, должен быть положительным, поэтому $q > p + 1$. Но тогда $p + 1$ не может делиться на q, то есть числа $p + 1$

и q взаимно просты (так как q — простое). Поэтому дробь, стоящая в левой части, несократима, так как

$$(q-p-1, p+1) = (q, p+1) = 1, \quad (q-p-1, q) = (p+1, q) = 1.$$

Тогда $q - p - 1$ должно быть делителем числа 4, то есть $q - p - 1$ не может принимать никакие значения, кроме $1, 2, 4$. Соответственно $q - p$ может принимать только значения $2, 3, 5$.

При заданных p и q легко подобрать n, для которых равенство будет выполнено. Несложно проверить, что подходят тройки

$$(p, q, n) = (3, 5, 78),\ (2, 5, 28),\ (2, 7, 19).$$

3. У Вики есть n блоков высотой 1, 2, …, n. Она хочет выстроить эти блоки в ряд таким образом, чтобы её кошка могла начать с крайнего левого блока и пробежать по всем блокам слева направо. Кошка может перепрыгивать на соседний блок, если он ниже текущего (на сколько угодно), либо выше ровно на 1. Сколько у Вики способов осуществить задуманное?

Ответ: 2^{n-1}.

Решение. Назовём расстановку блоков, по которой кошка сможет пропрыгать, *хорошей*, а по которой не сможет — *плохой*. Докажем индукцией по n, что ответ — это 2^{n-1}. База для $n = 1$ очевидна.

Пусть утверждение верно для всех значений, меньших n, докажем для $n+1$. Пусть блок высоты 1 стоит на $(k+1)$-м месте. Заметим, что

- после него должны стоять блоки 2, 3, …, $n-k$, иначе в какой-то момент произойдёт увеличение более чем на 1, и кошка не сможет на него запрыгнуть;
- до него стоят блоки $n-k+1$, $n-k+2$, …, n в хорошем порядке.

Рассмотрим какую-нибудь расстановку блоков $n-k+1$, $n-k+2$, …, n. Укоротим каждый блок на $n-k$, оставив порядок блоков тем же. Получим расстановку блоков 1, 2, …, k. Понятно, что если расстановка исходных блоков была хорошей, то и расстановка укороченных блоков будет хорошей, и наоборот — из плохой расстановки получится плохая. Таким образом, по предположению индукции количество хороших расстановок блоков $n-k+1$, $n-k+2$, …, n равно 2^k (в том числе и в случае $k = 0$).

Просуммировав количество хороших расстановок когда блок 1 стоит на местах 1, 2, …, $n+1$, получим

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n,$$

что доказывает переход.

4. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60°$ проведены биссектриса AL и медиана BM, пересекающиеся в точке O. Оказалось, что длина отрезка AO в три раза больше длины отрезка OL. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников ABO и AOM, если известно, что $AC = 4$.

Ответ: 1.

Решение. Пусть K — середина отрезка AL. Тогда KM — средняя линия треугольника ALC, то есть $KM \parallel BC$ и, следовательно, $\angle BLO = \angle OKM$ как накрест лежащие. Заметим также, что $KO = OL$, поскольку $AK = KL$, а $AO = 3OL$ по условию. Тогда треугольники KOM и LOB равны по стороне у двум углам (углы при вершин O вертикальные). Следовательно, $BO = OM$.

В треугольнике ABM отрезок AO является медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный и AO также является высотой. Треугольники ABO и AOM прямоугольные, а значит центры их описанных окружностей совпадают с серединами гипотенуз. Тогда отрезок, соединяющий центры описанных окружностей треугольников ABO и AOM — это средняя линия треугольника ABM, поэтому его длина равна половине длины стороны BM, то есть длине отрезка OM. Так как $\angle MAO = 30°$, то $2OM = AM$. Таким образом,

$$OM = \frac{AM}{2} = \frac{AC}{4} = 1.$$

5. Клетки доски $2m \times 2n$ раскрашены в чёрный и белый цвета (m и n — натуральные числа). Известно, что для любой клетки ладья, поставленная на эту клетку, атакует больше клеток противоположного цвета, чем клеток того же цвета (ладья атакует клетку, на которой стоит). Докажите, что в каждой строке одинаковое количество чёрных и белых клеток и столбце одинаковое количество чёрных и белых клеток.

Решение. Оценим двумя способами количество пар S разноцветных клеток, находящихся в одной строке или в одном столбце.

Пусть в какой-то строке k чёрных клеток и $2n - k$ белых клеток. Тогда в этой строке $k(2n - k)$ пар разноцветных клеток. Заметим, что

$$n^2 - k(2n - k) = n^2 - 2nk + k^2 = (n - k)^2 \geqslant 0,$$

то есть $n^2 \geqslant k(2n-k)$, причём равенство возможно только если $k = n$, то есть в строке одинаковое количество чёрных и белых клеток. Просуммировав по всем строчкам, получим, что количество разноцветных пар клеток, находящихся в одной строчке, не больше $2mn^2$. Аналогично количество разноцветных пар клеток, находящихся в одном столбце, не больше $2nm^2$. То есть

$$S \leqslant 2mn^2 + 2nm^2 = 2nm(n+m),$$

причём равенство возможно, только если во всех строках и столбцах одинаковое количество чёрных и белых клеток.

Оценим величину S по-другому. Для каждой из $4nm$ клеток по условию в одной строке или столбце с ней стоит больше клеток другого цвета, чем такого же. Таким образом, она образует не меньше $(n+m)$ разноцветных пар. То есть

$$S \geqslant \frac{1}{2} \cdot 4mn \cdot (m+n) = 2mn(m+n)$$

(множитель $\frac{1}{2}$ появился из-за того, что каждая пара считается дважды).

Таким образом, $2mn(m+n) \leqslant S \leqslant 2mn(m+n)$, то есть $S = 2mn(m+n)$. Но как было замечено ранее, это равенство возможно только в случае, когда во всех строках и столбцах одинаковое количество чёрных и белых клеток. Что и требовалось доказать.

6. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y = z^2, \\ y^3 + z = x^2, \\ z^3 + x = y^2. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = z = 0$.

Решение. Рассмотрим несколько случаев.

- Пусть x, y, z неотрицательны. Сложим три уравнения, получим

  $$(x^3 + x) + (y^3 + y) + (z^3 + z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

  Заметим, что если $x \geqslant 0$, то $x^3 + x \geqslant x^2$, причём равенство достигается только при $x = 0$. Аналогично для двух других переменных. Таким образом, в этом случае равенство возможно только при $x = y = z = 0$.

- Пусть хотя бы два из чисел x, y, z отрицательны, без ограничения общности, x и y. Тогда в уравнении $x^3 + y = z^2$ левая часть отрицательна, а правая неотрицательна. Противоречие.

- Пусть одно из чисел отрицательно, а два других — неотрицательны. Без ограничения общности, $x < 0$ и $y, z \geqslant 0$. Из равенства $x^3 + y = z^2$ следует, что $y > z^2$, а из равенства $z^3 + x = y^2$ — что $z^3 > y^2$. Совместив два неравенства, получим, что $z^3 > y^2 > z^4$. Отсюда $z^3 > z^4$, то есть $0 < z < 1$. Но тогда из того же неравенства получается, что $0 < y < 1$.

  Из равенства $z^3 + x = y^2$ следует, что

  $$0 < |x| < y^2 < z^3 < 1.$$

  Тогда

  $$y^3 + z > z > z^3 > |x| > x^2,$$

  чего быть не может, так как $y^3 + z = x^2$. Противоречие.

Получается, что единственное решение системы — это $x = y = z = 0$. Несложно видеть, что оно подходит.