Учимся писать

1. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a + b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

Решение. Задача 9.6 отсюда: https://olympiads.mccme.ru/vmo/2016/iii-2.pdf.

2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b + c) = P(a), \quad P(c + a) = P(b), \quad P(a + b) = P(c).$$

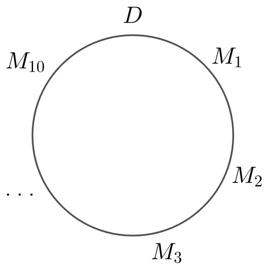
Решение. Задача 10.2 отсюда: https://olympiads.mccme.ru/vmo/2022/iii-1.pdf.

3. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

Решение. Задача 9.2 отсюда: https://mmo.mccme.ru//2023/86mmo.pdf.

4. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

Решение. Обозначим девочку из условия через D, а мальчиков — $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ в порядке обхода по часовой стрелке, начиная с D. Мальчиков и девочек одинаковое количество, поэтому если пара из мальчика и девочки хорошая, то на каждой из двух дуг между ними поровну мальчиков и девочек.



Будем обозначать через $[A, B]$ дугу между A и B, включая A и B, такую, что из A в B происходит движение по часовой стрелке. Если какой-то из людей на конце не включается, будем использовать круглую скобку вместо квадратной. Через $f([A, B])$ будем обозначать количество мальчиков на дуге $[A, B]$ минус количество девочек на этой дуге. Если A и B разного пола, то условие того, что они образуют хорошую пару, эквивалентно тому, что $f([A, B]) = 0$.

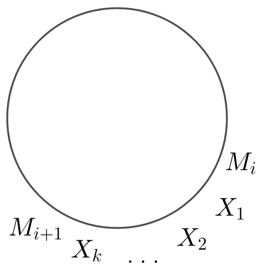
Перейдём к решению задачи. Докажем три утверждения.

Утверждение 1. На дуге $[M_i, M_{i+1}]$ для всех i от 1 до 9 существует девочка, образующая хорошую пару с M_i.

Утверждение 2. Если девочка на дуге $[M_i, M_{i+1}]$ для всех i от 1 до 9 образует хорошую пару с M_i, то она образует хорошую пару с M_1.

Утверждение 3. Если на дуге $[M_i, M_{i+1}]$ для всех i от 1 до 10 (мы считаем, что $M_{11} = M_1$) существует хотя бы две девочки, образующих хорошую пару с M_i, то между этими девочками найдётся мальчик, образующий хорошую пару с D.

Доказательство утверждения 1. Будем последовательно перебирать людей $X_1, X_2, \ldots, X_k$ между M_i до M_{i+1}.



Рассмотрим значения

$$f([M_i, M_i]),\ f([M_i, X_1]),\ f([M_i, X_2]),\ \ldots,\ f([M_i, X_k]),\ f([M_i, M_{i+1}]).$$

Вначале значение равно 1, а в конце

$$f([M_i, M_{i+1}]) = f([D, M_{i+1}]) - f([D, M_i)) = 0 - (-1) = 1.$$

Тогда для X_k выполнено равенство $f([M_i, X_k]) = 0$. Рассмотрим первого X_j такого, что $f([M_i, X_j]) = 0$.

- Если X_j — девочка, то утверждение доказано.
- Если X_j — мальчик, то $f([M_i, X_{j-1}]) = -1$. Но поскольку при переходе от одного человека к другому значение f меняется на 1, то по дискретной непрерывности между M_1 и X_{j-1} найдётся человек X', для которого $f([M_i, X']) = 0$. Противоречие с выбором X_j.

Доказательство утверждения 2. Заметим, что

$$f([M_1, M_i)) = f([D, M_i)) - f([D, M_1)) = (-1) - (-1) = 0.$$

Пусть девочка D' на дуге $[M_i, M_{i+1}]$ образует хорошую пару с M_i. Тогда

$$f([M_1, D']) = f([M_1, M_i)) + f([M_i, D]) = 0 + 0 = 0.$$

Доказательство утверждения 3. Пусть на отрезке $[M_i, M_{i+1}]$ девочки D_1 и D_2 образуют хорошую пару с M_i, причём D_1 расположен на дуге $[M_i, D_2]$. Тогда

$$f([D, D_1]) = f([D, M_i)) + f([M_i, D_1]) = (-1) + 0 = -1.$$

Аналогично $f([D, D_1]) = -1$. Для человека X, стоящего перед D_2,

$$f([D, X]) = f([D, D_2]) + 1 = 0.$$

Аналогично доказательству утверждения 1 получаем, что первый человек X', для которого $f([D, X']) = 0$ — это мальчик.

Вернёмся к решению задачи. По утверждениям 1 и 2 на каждой дуге найдётся девочка, образующая хорошую пару с M_1. По утверждению 3 такая девочка на каждой дуге одна. Следовательно, мальчик M_1 — искомый.