Формула включений и исключений

1. **(а)** Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества. Докажите **формулу включений-исключений**:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

   (б) Докажите, что если в формуле включений-исключений выражение в правой части оборвать перед знаком «+», то равенство заменится на неравенство «$\geqslant$», а если перед знаком «−» — то на неравенство «$\leqslant$».

2. Лёша, Ваня и Серёжа решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если её решил только один человек, и лёгкой, если её решили все трое. На сколько отличается количество трудных задач от количества легких?

3. На Новый год каждый из n школьников подготовил подарок и бросил его в мешок. Подарки перемешали, и каждый школьник вытянул один подарок. Сколько существует распределений подарков, в которых ни одному школьнику не достался свой собственный подарок?

4. Сколько существует способов расставить 20 не бьющих друг друга ладей на шахматной доске 20×20 так, чтобы ровно 10 из них стояли на диагонали, начинающейся из левого нижнего угла квадрата?

5. Обозначим $T(n) = 1+2+\ldots+n$. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что каждое из них не превосходит n, а их сумма не меньше $2n$. Не используя явную формулу для $T(n)$, докажите, что

$$T(n) = T(a)+T(b)+T(c)-T(a+b-n)-T(b+c-n)-T(a+c-n)+T(a+b+c-2n).$$

6. Сколько существует упорядоченных наборов из 20 подмножеств (возможно, некоторые из них пустые) множества чисел от 1 до 100 так, чтобы пересечение всех подмножеств было пустым? Подмножества в наборе могут повторяться.

7. **(а)** Докажите тождество:

$$6xyz = (x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (x+z)^3 - (y+z)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$$

   (б) Обобщите тождество на случай n переменных.