Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ — это количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Напоминание 1. Функция $\varphi(n)$ *мультипликативна*, то есть для взаимно простых натуральных чисел a и b выполнено равенство $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Напоминание 2. Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \frac{p_2 - 1}{p_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k - 1}{p_k}.$$

1. Найдите все натуральные n такие, что
(а) $\varphi(n) = 4$;
(б) $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

2. Докажите, что если n делится на m, то $\varphi(n)$ делится на $\varphi(m)$.

3. Докажите, что $\varphi(n) \cdot \varphi(m) = \varphi(\text{НОД}(m, n)) \cdot \varphi(\text{НОК}(m, n))$.

4. Рассмотрим такое n, что $\varphi(n)$ — это уникальное значение функции Эйлера (то есть принимаемое только при этом n).
(а) Докажите, что n делится на 36.
(б) Докажите, что n делится на 43.

5. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все делители натурального числа n. Докажите, что

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

Указание: посмотрите на $\varphi(d_i)$ как на количество каких-то чисел от 1 до n.

6. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т. д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

7. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.