# Неравенство средних

**Определение.** Выражения

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

называются соответственно *средним квадратическим*, *средним арифметическим*, *средним геометрическим* и *средним гармоническим* неотрицательных чисел $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ и удовлетворяют предлагаемому неравенству.

**1.** Докажите неравенство о средних для $n = 2$.

**2.** **(а)** Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 4$. Когда здесь достигается равенство?
**(б)** Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 3$. Когда здесь достигается равенство?
*Подсказка:* подставьте в предыдущее неравенство какое-то конкретное $x_4$.

**3.** Докажите в случае $n = 3$ и $n = 4$ неравенства между
**(а)** средним гармоническим и средним геометрическим;
**(б)** средним арифметическим и средним квадратическим.

Далее в задачах предполагается, что числа положительные. При решении необходимо пользоваться неравенством о средних.

**4.** Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant \frac{1}{128}$.

**5.** Докажите следующие неравенства:
**(а)** $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ba^2$;
**(б)** $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}$;
**(в)** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

**6.** Произведение положительных чисел $a_1$, $a_2$,…, $a_n$ равно 1. Докажите, что

$$(2+a_1)(2+a_2)\ldots(2+a_n) \geqslant 3^n.$$

**7.** Некоторые положительные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют неравенству $abc \geqslant ab + bc + ca$. Докажите, что

$$\sqrt{abc} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

**8.** Известно, что $a + b + c = 3$. Докажите, что:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ac.$$