Ориентированные графы и турниры

Определение. *Ориентированный граф* — граф, ребра которого имеют направление. По умолчанию в ориентированном графе нет петель и сонаправленных кратных ребер, но допускаются противоположно направленные ребра.

Пути и циклы в ориентированном графе — то же самое, что пути и циклы в обычном графе, но каждое ребро может быть пройдено только в соответствии с направлением от начала к концу.

Определение. Ориентированный граф называется *связным,* если он становится связным при замене всех ориентированных ребер на неориентированные. Ориентированный граф называется *сильно связным,* если из любой его вершины существует путь по стрелкам до любой другой.

Определение. *Турниром* называется полный ориентированный граф.

1. **(а)** В королевстве N. из любого города можно добраться до любого другого по дорогам с двусторонним движением. Докажите, что король может назначить некоторый город столицей и сделать все дороги односторонними так, что из столицы можно будет добраться до любого другого города.
   (б) Пусть про королевство N. также известно, что число дорог, выходящих из каждого города, — четно. Докажите, что король может сделать все дороги односторонними так, что из любого города можно будет добраться до любого другого города.

2. **(а)** Две вершины u и v в ориентированном графе назовём *связанными*, если существует путь из u в v и путь из v в u. Докажите, что вершины ориентированного графа разбиваются на части (которые далее мы будем называть *компонентами сильной связности*) такие, что пара вершин u и v связана тогда и только тогда, когда они находятся в одной компоненте сильной связности.
   (б) Докажите, что компонента сильной связности сильно связна.
   (в) Докажите, что можно пронумеровать компоненты сильной связности так, чтобы рёбра между компонентами вели из компонент с меньшим номером в компоненты с бóльшим.

3. Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины A по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в

вершину A. Докажите, что граф сильно связный.

4. Дан турнир с n вершинами, который не является сильно связным. У какого наименьшего количества рёбер нужно поменять направление так, чтобы граф стал сильно связным?

5. **(а)** Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(б) Сколько существует турниров на n вершинах, не содержащих циклов?
(в) Докажите, что турнир сильно связан тогда и только тогда, когда в нем есть гамильтонов цикл.

6. Назовем вершину *самой сильной*, если расстояние от нее до любой другой не превосходит двух.
(а) Докажите, что в турнире есть самая сильная вершина.
(б) Докажите, что если в турнире есть ровно одна самая сильная вершина, то из нее ведут стрелки во все другие вершины.