Сравнительный разнобой

1. Докажите, что существует бесконечно много попарно взаимно простых чисел вида $2^n - 3$.

2. Пусть n — натуральное число, большее 1. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:

   - если x и n взаимно простые, то $x^6 \equiv 1 \pmod{n}$;
   - 504 кратно n.

3. Дано натуральное число $a > 100$. Докажите, что найдётся число $n = \overline{n_k \ldots n_1 n_0}$ с натуральным k такое, что $n_k a^k + n_{k-1} a^{k-1} + \ldots + n_1 a + n_0$ делится на n.

4. За круглым столом совещались n человек. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Обязательно ли найдутся два собеседника, сидящие на одинаковом расстоянии (считая по дуге по часовой стрелке) до того места, где они сидели в прошлый раз, если
   (а) $n = 28$; **(б)** $n = 29$?

5. Докажите, что для любого целого числа c и простого p найдётся x такое, что $x^x \equiv c \pmod{p}$.

6. Докажите, что существует бесконечная монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что при всех целых $k \geqslant 0$ последовательность $\{k + a_n\}$ содержит лишь конечное количество простых чисел.

7. Дано нечётное $n > 1$. Натуральное число a, $1 \leqslant a \leqslant n - 1$, назовём хорошим, если каждое из чисел a и $a + 1$ взаимно просто с n. Докажите, что произведение всех хороших чисел даёт остаток 1 при делении на n.

8. Числа a и b таковы, что $a^n + n$ кратно $b^n + n$ для любого натурального n. Докажите, что $a = b$.