Подсчёт конфигураций в графах

1. В компании из 10 человек некоторые пары людей поссорились, всего произошло 14 ссор. Докажите, что можно выбрать трёх человек, которые не ссорились друг с другом.

2. В однокруговом турнире участвовала 31 команда. Оказалось, что каждая команда выиграла и проиграла ровно 15 раз. Назовём тройку команд *сбалансированной*, если в этой тройке каждая команда выиграла и проиграла ровно по одному разу. Найдите количество сбалансированных троек.

3. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо никакие двое не дружат друг с другом.

4. В графстве проживают n джентльменов. Каждый из них знаком с k другими джентльменами. У любых двух знакомых джентльменов ровно t общих знакомых, а у каждых двух незнакомых джентльменов ровно m общих знакомых. Докажите, что
$$m \cdot (n - k - 1) = k \cdot (k - t - 1).$$

5. В двудольном графе 22 ребра и по 7 вершин в каждой доле. Докажите, что в нём есть цикл длины 4.

6. В день Святого Валентина n пар влюблённых ($n \geqslant 3$) провели два однокруговых турнира по настольному теннису — один среди юношей и один среди девушек. Юноша и девушка из каждой пары суммарно выиграли $n - 1$ игру. Докажите, что количество троек юношей, в которых A выиграл у B, B выиграл у C, а C обыграл A, равно количеству таких троек девушек.

7. В компании из 20 человек у каждого хотя бы 10 знакомых. Докажите, что найдутся три человека, имеющие не меньше трёх общих знакомых.

8. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.