Бесконечные слова

Слово Туэ — Морса

Будем строить последовательность слов, состоящих из букв A и B, по следующему правилу: $T_0 = A, T_n = T_{n-1}\overline{T}_{n-1}$ для всех натуральных n (то есть слово $\overline{T}_{n-1}$ приписано справа к слову T_{n-1}), где $\overline{T}_{n-1}$ — это слово T_{n-1}, в котором все A заменили на B и наоборот. Таким образом,

$$T_1 = AB, \quad T_2 = ABBA, \quad T_3 = ABBABAAB, \quad \ldots$$

Каждое следующее слово начинается с предыдущего, поэтому таким образом получается бесконечное слово, которое называется *словом Туэ — Морса*.

1. **(а)** Начнём выписывать слово с буквы A. На каждом шаге будем заменять букву A на AB, а B — на BA. Докажите, что мы будем выписывать слово Туэ — Морса.
   (б) Докажите, что если в слове Туэ — Морса зачеркнуть все буквы, стоящие на чётных позициях, то оставшиеся слово будет словом Туэ — Морса.

2. Разобьём натуральные числа от 1 до 2^n на два множества: первое множество состоит из таких k, что на k-м месте в слове Туэ — Морса стоит A, а второе — из оставшихся чисел.
   (а) Докажите, что при $n > 1$ суммы чисел в множествах равны.
   (б) Докажите, что при $n > 2$ суммы квадратов чисел в множествах равны.
   (в) Докажите, что для любого натурального m, меньшего n, суммы m-х степеней чисел в первом и во втором множествах равны.

3. **(а)** Докажите, что если слово Туэ — Морса периодично (возможно, с предпериодом), то длина периода чётна.
   (б) Докажите, что слово Туэ — Морса не периодично.

4. Докажите, что слово Туэ — Морса не содержит подслова вида $axaxa$, где a — буква, x — слово.

5. Будем читать слово Туэ — Морса слева направо и записывать расстояния между последовательными вхождениями буквы A:

   $$\mathbf{A}BB\mathbf{A}B\mathbf{A}\mathbf{A}BB\mathbf{A}\mathbf{A}B\mathbf{A}BB\mathbf{A}\ldots \quad \to \quad 2102012\ldots$$

   Докажите, что в полученном слове нельзя найти двух одинаковых подслов, записанных подряд.

Слово Фибоначчи

Теперь будем рассматривать следующую последовательность слов: $\Phi_0 = A$, $\Phi_1 = AB$, $\Phi_{n+1} = \Phi_n \Phi_{n-1}$ для натуральных n. Таким образом,

$$\Phi_2 = ABA, \quad \Phi_3 = ABAAB, \quad \Phi_4 = ABAABABA.$$

Полученное таким образом бесконечное слово называется *словом Фибоначчи*.

6. Начнём выписывать слово с буквы A. На каждом шаге будем заменять букву A на AB, а B — на A. Докажите, что мы будем выписывать слово Фибоначчи.

7. **(а)** Докажите, что слово $\Phi_n \Phi_{n-1}$ отличается от слова $\Phi_{n-1}\Phi_n$ лишь в двух последних буквах.
(б) Докажите, что если из Φ_n удалить две последние буквы, то получится палиндром.

8. Докажите, что слово Фибоначчи не является периодичным (даже с предпериодом).